

# Удельная вероятность связей событий в случайном множестве событий

О.Ю. ВОРОБЬЁВ

*Институт вычислительного моделирования СО РАН  
Красноярский государственный университет  
Академгородок, Красноярск, 660036, Россия  
e-mail: vorob@akadem.ru, url: r-events.narod.ru*

Е.Е. ГОЛДЕНОК

*Красноярский торгово-экономический институт  
ул.Лиды Прушинской 2, Красноярск, 660075, Россия  
e-mail: golde@rambler.ru*

## Аннотация

Работа посвящена одному из новых направлений эвентологии, начало которому положило понятие удельной вероятности связей событий в случайном множестве событий, заимствованное из ядерной физики, как отдаленная аналогия удельной энергии связей нуклонов в ядре. Новое понятие развито благодаря теории симметричных случайных событий — теоретической основы современной эвентологии. Дается определение удельной энергии связей событий, описание общих свойств этой характеристики и ее сравнение с другими измерителями статистических связей. Показано качественное сравнение зависимости удельной вероятности связей событий от числа событий с экспериментальной зависимостью удельной энергии связей нуклонов от массового числа и с формулой Вайцзеккера (1953).

Рассматривается эвентологическая природа статистических связей между случайными событиями, обсуждаются соотношения между распределениями вероятности и статистической энергии случайного множества событий и другие вопросы.

## 1 ВВЕДЕНИЕ

Эвентология — теория случайных событий — изучает статистическое движение множеств случайных событий, структуры их взаимозависимостей и взаимодействий, определяемые вероятностными распределениями случайных событий [2]. Статистическая эвентология — это вершина теории вероятностей и теоретическое основа наук о природе и обществе.

---

*Ключевые слова и фразы:* симметричные случайные события, строго симметричные случайные события, распределение мощности случайного множества событий, вероятности пересечений событий, вероятности объединений событий, формулы обращения Мёбиуса, удельная вероятность связей, ковариация взаимозависимостей событий, сила взаимодействия событий, эвентологическая модель ядра, формула Вайцзеккера.

© 2003 О.Ю. Воробьёв и Е.Е. Голденок

( .), -

, '2003,

То, о чем пойдет речь в этой работе можно, наверное, с полным правом назвать эвентологическим толкованием известной в атомной физике зависимости удельной энергии связи нуклонов в ядре от его массового числа (рис. 1). Характер этой зависимости порождается коллизией короткодействующих ядерных сил и дальнодействующих электромагнитных сил взаимодействия нуклонов в ядре.

Возникла идея — построить эвентологическую модель ядра с такой структурой статистических связей случайных событий, что некая ее характеристика — *удельная вероятность связей событий*, аналогичная удельной энергии связей нуклонов (которая измеряет структуру физического взаимодействия нуклонов в ядре), так же зависит от числа событий, как удельная энергия связей от массового числа.

Хотя с момента возникновения призрачной эвентологической аналогии физического понятия удельной энергии связей времени прошло не так уж много, его вполне хватило, чтобы испробовать несколько претендентов на роль удельной вероятности связей событий в случайном множестве событий. Первые пробные определения были даны на интуитивном уровне, опирались только на физические аналоги и на первых порах, казалось, вполне им соответствовали. Однако эти предварительные определения, хотя и сформулированные математически строго, не могли существовать в одиночестве сами по себе и вынуждены были пройти через проверку разработанной чуть позже теорией симметричных случайных событий [2]. Данная теория пока еще не закончена, подробно разработаны только ее основы. Но уже этого оказалось достаточно, чтобы критически оценить первые попытки определения удельной вероятности связей событий. Теперь появилась возможность теоретически обоснованного выбора направлений поиска наиболее удачного эвентологического толкования удельной энергии связей нуклонов в ядре и ее зависимости от массового числа.

Рассмотрим подробнее эвентологическое толкование этой физической зависимости, сосредоточившись на самом первом определении *удельной вероятности связей событий в случайном множестве событий*.

Пусть имеется множество  $\mathfrak{X}_A \subseteq \mathcal{F}$ , состоящее из  $A = |\mathfrak{X}_A|$  событий, под которым определено случайное множество событий

$$K_A : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}) \rightarrow (2^{\mathfrak{X}_A}, 2^{2^{\mathfrak{X}_A}})$$

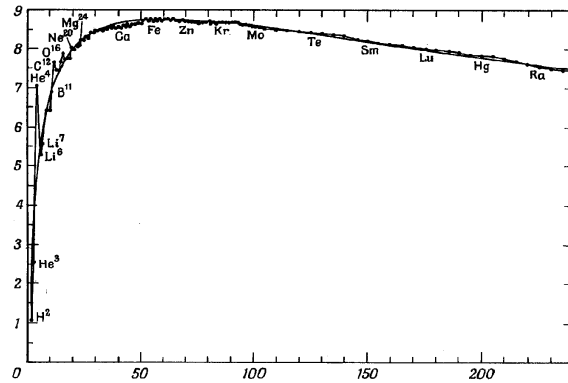


Рис. 1: Зависимость экспериментальных значений удельной энергии связей (МэВ на один нуклон) от массового числа (числа нуклонов в ядре). Взято из книги: Jay Ogear "Fundamental Physics" [1].

с распределением:

$$p(X) = \mathbf{P}(K_A = X) = \mathbf{P} \left( \bigcap_{x \in X} x \bigcap_{x \in X^c} x^c \right), \quad X \in 2^{\mathfrak{X}_A}.$$

Исходное предположение. Будем считать, что эвентологической аналогией нуклона является событие, аналогией ядра, состоящего из нуклонов, — объединение событий, а аналогией массы нуклона и массы ядра — вероятности соответствующих событий.

Уточненное предположение. Эти аналогии даны намеренно в слишком общей форме, которая требует некоторого уточнения. Поскольку физические масса и энергия эквивалентны с точностью до постоянной, а статистическая энергия  $H(X)$  и вероятность  $p(X)$  случайного множества событий  $K_A$  связаны соотношением

$$p(X) = \frac{1}{Z} \exp \left\{ -\beta H(X) \right\}, \quad X \subseteq \mathfrak{X}_A,$$

то на роль эвентологического аналога массы больше подходит так называемая *логарифмическая вероятность*

$$-\ln p(X),$$

— величина, пропорциональная статистической энергии  $H(X)$ .

Первый претендент на роль удельной вероятности связей событий в случайном множестве событий  $K_A$  под  $\mathfrak{X}_A$  имел следующее:

Определение (удельная вероятность связей событий). *Удельной вероятностью связей событий* в случайном множестве событий  $K_A$  под  $\mathfrak{X}_A$  называется величина

$$\rho^{(A)} = \frac{1}{A} \mathbf{P}(|K_A| \geq 2).$$

Это, на первый взгляд, довольно странное определение оправдывается тем, что величина  $\rho^{(A)}$ , предлагаемая на роль удельной вероятности связей, имеет смысл некоего среднего "количества" "совместной" вероятности (т.е. вероятности наступления не менее двух событий), приходящегося на каждое событие  $x$  из  $A$  событий, образующих множество событий  $\mathfrak{X}_A$ . Действительно,

$$\frac{1}{A} \mathbf{P}(|K_A| \geq 2) = \frac{1}{A} \sum_{x \in \mathfrak{X}} \sum_{\substack{x \in X \\ |X| \geq 2}} \frac{1}{|X|} p(X).$$

Первая эвентологическая модель ядра предполагает, что ядро состоит из нуклонов одного типа, и поэтому использует случайное множество  $K_A$ , которое имеет под  $\mathfrak{X}_A$  так называемое "одинарное" симметричное распределение [2]. Случайные события в симметричных случайных множествах равновероятны (этот факт отражает примерное равенство масс нуклонов в ядре) и все имеют вероятность  $p$ , которая называется собственной вероятностью случайного множества  $K_A$ , а сами симметричные события по этой причине иногда называются  $p$ -событиями. Для "одинарного" случайного множества  $p$ -событий формула первого претендента на роль удельной вероятности связей, выраженная через мощностные распределения вероятностей, принимают следующий вид.

Определение 1' (удельная вероятность связей симметричных событий в "одинарном" случайном множестве).

$$\rho_A^{(1)} = \frac{1}{A} \left\{ 1 - \pi_A(0) - \pi_A(1) \right\}.$$

Вторая эвентологическая модель ядра предполагает, что ядро состоит из нуклонов двух типов (протонов и нейтронов), и поэтому использует случайное множество  $K_{M,N}$ , которое имеет под  $\mathfrak{X}_{M,N} = \mathfrak{X}_M + \mathfrak{X}_N$  так называемое "бинарное" симметричное распределение [2] и является объединением  $K_{M,N} = K_M + K_N$  двух своих проекций  $K_M$  и  $K_N$ , имеющих соответственно под  $\mathfrak{X}_M$  и  $\mathfrak{X}_N$  "одинарные" симметричные распределения. Симметричные случайные множества  $K_M$  и  $K_N$  считаются эвентологическими моделями протонного и нейтронного подмножества ядра соответственно. Для "бинарного" случайного множества  $p$ -событий формула первого претендента на

роль удельной вероятности связей, выраженная через мощностные распределения вероятностей, принимает следующий вид.

Определение 1'' (удельная вероятность связей симметричных событий в "бинарном" случайном множестве).

$$\rho_{M,N}^{(1)} = \frac{1}{M+N} \left\{ 1 - \pi_{M,N}(0,0) - \pi_{M,N}(0,1) - \pi_{M,N}(1,0) \right\}.$$

Конечно, проще работать с моделью ядра, когда предполагается, что случайные множества  $K_M$  и  $K_N$  независимы. Тогда их совместные мощностные распределения имеют вид произведений:

$$\pi_{M,N}(m,n) = \pi_M(m)\pi_N(n), \quad p_{M,N}(m,n) = p_M(m)p_N(n),$$

$$1 - u_{(m,n)} = (1 - u_{(m)})(1 - u_{(n)}),$$

где  $(m,n) \in \{0, \dots, M\} \times \{0, \dots, N\}$ . В связи с этим формула в определении удельной вероятности связей существенно упрощается:

$$\rho_{M,N}^{(1)} = \frac{1}{M+N} \left\{ 1 - \pi_M(0)\pi_N(0) - \pi_M(0)\pi_N(1) - \pi_M(1)\pi_N(0) \right\}.$$

Однако нельзя забывать, что такое предположение нарушает аналогию с симметрией ядерного взаимодействия нуклонов — независимость предполагается только для событий разных типов: "протон-событий" и "нейтрон-событий". В то время, как силы взаимодействия нуклонов одинаковы для любых сочетаний: протон-протонного, нейтрон-нейтронного и протон-нейтронного взаимодействия.

Частный вариант второй эвентологической модели ядра предполагает специальный вид распределений симметричных случайных множеств  $K_M$  и  $K_N$ . Как известно из ядерной физики, протоны отличаются от нейтронов главным образом тем, что имеют положительный электромагнитный заряд, в то время как нейтроны не имеют никакого заряда. Электромагнитное взаимодействие между нуклонами в ядре приводит к тому, что протоны отталкиваются друг от друга, а по отношению к нейтронам ведут себя так же, как и нейтроны между собой — нейтрально. Эти особенности физического взаимодействия нуклонов в ядре отражены в частном варианте второй эвентологической модели следующим образом. Случайное множество  $K_M$  (первая проекция), рассматриваемое в качестве эвентологической модели

"протонного подмножества" части ядра, является объединением непересекающихся симметричных событий, которые, как известно, эвентологически (статистически) наиболее отталкиваются. Случайное множество  $K_N$  (вторая проекция), рассматриваемое в качестве эвентологической модели "нейтронного подмножества" ядра, является объединением симметричных событий, независимых в совокупности, которые между собой эвентологически (статистически) нейтральны. А тот факт, что между протонами и нейтронами ядра нет электромагнитного взаимодействия, отражает та самая эвентологическая (статистическая) независимость случайных множеств  $K_M$  и  $K_N$  между собой, которая нарушает аналогию с симметрией ядерного взаимодействия между нуклонами.

Техническое разрешение данного противоречия выходит за рамки этой работы и откладывается до следующих публикаций. Можно только сказать, что теоретически оно разрешается сразу, стоит лишь отказаться от соответствующего предположения независимости. Но такой отказ ведет к работе с совместным распределением случайных множеств  $K_M$  и  $K_N$ . Это, конечно, сложнее. Но возникающие трудности — чисто технические и требуют для своего преодоления всего лишь времени.

Из сделанных предположений вытекает, что в рассматриваемом варианте второй эвентологической модели мощностные распределения первой проекции  $K_M$  (модель "протонного подмножества" ядра) должны иметь вид:

$$\pi_M(m) = \begin{cases} 1 - Mp, & m = 0, \\ Mp, & m = 1, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \quad p_M(m) = \begin{cases} 1 - Mp, & m = 0, \\ p, & m = 1, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

$$u_{(m)} = mp, \quad m = 0, \dots, M.$$

А мощностные распределения второй проекции  $K_N$  (модель "нейтронного подмножества" ядра) должны иметь вид:

$$\pi_N(n) = C_N^n p^n (1-p)^{N-n}, \quad p_N(n) = p^n (1-p)^{N-n},$$

$$u_{(n)} = 1 - (1-p)^n, \quad n = 0, \dots, N.$$

В итоге для рассматриваемого частного варианта второй эвентологической модели формула в определении удельной вероятности связей симметричных  $p$ -событий принимает частный вид:

$$\rho_{M,N}^{(1)} = \frac{1}{M+N} \left\{ 1 - (1-p)^{N-1} + (1-Mp)Np(1-p)^{N-1} \right\}.$$

Общий вариант второй эвентологической модели ядра отличается от только что рассмотренного частного тем, что распределение событий в случайном множестве  $K_N$  (модель "нейтронного подмножества" ядра) не предполагается независимым в совокупности. Снятие этого предположения независимости приводит к тому, что мощностные распределения первой проекции  $K_M$  (модель "протонного подмножества" ядра) остаются теми же, что и в частном варианте, а мощностные распределения второй проекции  $K_N$  принимают самый общий вид:

$$\pi_N(n), \quad p_N(n), \quad u_{(n)}, \quad n = 0, \dots, N.$$

В итоге, для рассматриваемого общего варианта второй эвентологической модели формула в определении удельной вероятности связей симметричных  $p$ -событий выглядит все еще довольно просто:

$$\rho_{M,N}^{(1)} = \frac{1}{M+N} \left\{ 1 - \pi_N(0) - (1 - Mp)\pi_N(1) \right\}.$$

## 2 ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ УДЕЛЬНОЙ ЭНЕРГИИ СВЯЗЕЙ НУКЛОНОВ В ЯДРЕ ОТ МАССОВОГО ЧИСЛА

Интересно провести качественное сравнение двух зависимостей — эвентологической и физической: зависимости величины  $-\ln \rho_{(a)}$ , логарифмической удельной вероятности связей симметричных  $p$ -событий в случайном множестве событий  $K_a$  под  $X_a \subseteq \mathfrak{X}_A$ , от вероятностного числа  $a$  и экспериментальной зависимости удельной энергии связей нуклонов в ядре от его массового числа (рис. 1). Проведем такое сравнение в рамках первой эвентологической модели ядра. Для этого выберем симметричное случайное множество  $p$ -событий  $K_A$  под  $\mathfrak{X}_A$  с распределением мощности

$$\pi_A(a), \quad a = 0, \dots, A,$$

обладающее структурой статистических связей, которая характеризуется функцией

$$\rho_{(a)} = \frac{1}{a} \left\{ 1 - \pi_a(0) - \pi_a(1) \right\}, \quad a = 0, \dots, A.$$

Будем считать, что распределение мощности этого случайного множества

$$\pi_A(a) = (\pi_A^i(a) + \alpha(A - a)) \frac{1}{Z_\alpha}$$

определяется двумя параметрами:  $\alpha \geq 0$  и собственной вероятностью  $p$ , где

$$\pi_A^i(a) = C_A^a (p^*)^a (1 - p^*)^{A-a}$$

—  $(A, p^*)$ -биномиальное распределение, описывающее распределение мощности симметричного случайного множества  $p$ -событий, независимых в совокупности,

$$p^* = pZ_\alpha - \alpha(A^2 - 1)/6$$

— связь биномиальной вероятности  $p^*$  с собственной вероятностью  $p$  и параметром  $\alpha$ , а

$$Z_\alpha = \sum_{a=0}^A (\pi^i(a) + \alpha(A - a)) = 1 + \alpha A(A + 1)/2$$

— нормирующая константа.

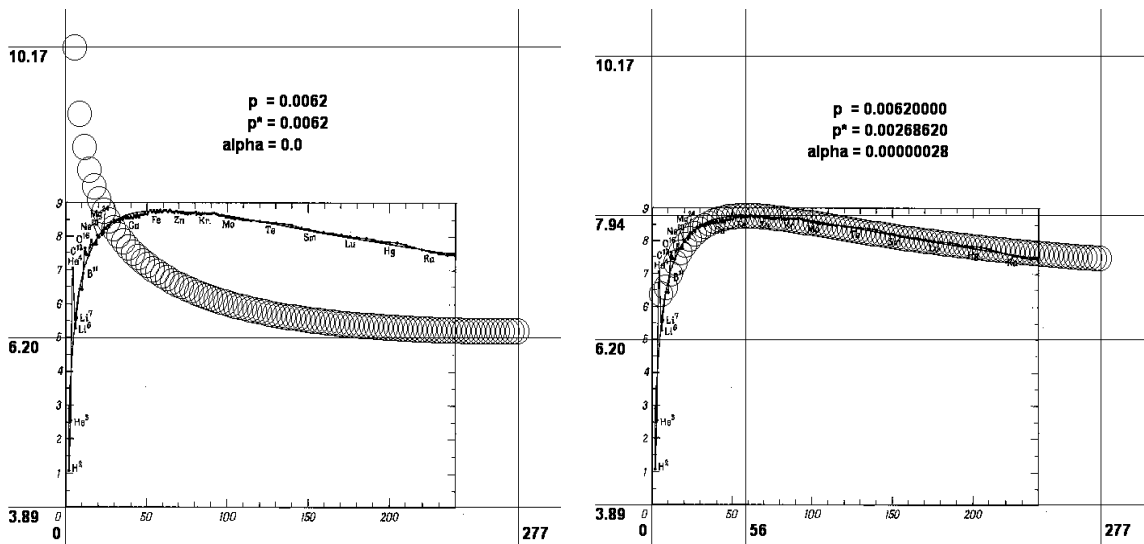


Рис. 2: Качественное сравнение зависимости экспериментальной удельной энергии связей нуклонов в ядре от массового числа  $A$  с зависимостью логарифмической удельной вероятности связей  $p$ -событий ( $p = 0.0062$ ) от числа событий для первой эвентологической модели ядра (большие кружки). Слева: независимые строго симметричные случайные  $p$ -события. Справа: зависимые строго симметричные случайные  $p$ -события с распределением, параметры которого приведены в тексте работы. Для зависимых  $p$ -событий логарифмическая удельная вероятность связей достигает своего максимума при  $a = 56$ , и этот максимум равен 7.94 единиц статистической энергии.

Когда  $\alpha = 0$ , мощностное распределение  $\pi_A(a)$  определяет независимые в совокупности  $p$ -события. Чем больше  $\alpha$ , тем  $\pi_A(a)$  становится ближе к так называемому "линейно-убывающему" распределению симметричного случайного множества

$$\pi_A(a) \rightarrow \frac{2}{A+1} \left(1 - \frac{a}{A}\right), \quad a = 0, \dots, A,$$



вероятности которого линейно убывают:

$$\pi_A(0) = \frac{2}{A+1}, \dots, \pi_A(A) = 0.$$

На рис. 2 показано качественное сравнение физической зависимости удельной энергии связей нуклонов в ядре от массового числа с эвентологической зависимостью логарифмической удельной вероятности

$$-\ln \rho_{(a)} = -\ln \left( \frac{1}{a} \{1 - \pi_a(0) - \pi_a(1)\} \right)$$

от вероятностного числа  $a = 0, \dots, A$ . Параметры соответствующего мощностного распределения  $\pi_A(a)$  имеют вид:  $\alpha = 0.00000028$ , собственная вероятность  $p = 0.0062$ , биномиальная вероятность  $p^* = 0.0026862$ .

### 3 ФОРМУЛА ВАЙЦЗЕККЕРА

В рамках физической капельной модели ядра можно получить полуэмпирическую формулу Вайцзеккера (1953) для энергии связей нуклонов в ядре:

$$E(A, Z) = a_1 A - a_2 A^{-1/3} - a_3 Z^2 A^{-4/3} - a_4 (A/2 - Z)^2 A^{-2} + a_5 A^{-7/4},$$

где  $A$  — массовое число (число нуклонов),  $Z$  — заряд (число протонов),  $N = A - Z$  — число нейтронов в ядре. Входящие в формулу коэффициенты  $a_1, a_2, a_2, a_3, a_4$  и  $a_5$  оцениваются из экспериментальных данных по энергиям связей нуклонов в ядрах, что дает

$$a_1 = 15.75; \quad a_2 = 17.8; \quad a_3 = 0.71; \quad a_4 = 94.8;$$

$$a_5 = \begin{cases} +34, & \text{для четно - четных ядер,} \\ 0, & \text{для четно - нечетных и нечетно - четных ядер,} \\ -34, & \text{для нечетно - нечетных ядер.} \end{cases}$$

Удельная энергия связей нуклонов в ядре вычисляется по формуле

$$\varepsilon = E/A.$$

График зависимости удельной энергии связей нуклонов в ядре (вычисленной по формуле Вайцзеккера) от массового числа показан на рис. 3. Стоит заметить, что на график нанесены только те значения удельной энергии связей, которые соответствуют ядрам  $(Z, N)$ =(число протонов, число нейтронов), встречающимся в природе.

На рис. 3 показано также качественное сравнение этой физической зависимости с эвентологической зависимостью логарифмической удельной вероятности

$$-\ln \rho_{(m,n)} = -\ln \left( \frac{1}{m+n} \left\{ 1 - \pi_n(0) - (1 - mp)\pi_n(1) \right\} \right)$$

от общего числа событий  $m + n = 0, \dots, A$  в рамках второй эвентологической модели ядра. Параметры мощностного распределения  $\pi_N(n)$  ("нейтронного подмножества"  $p$ -событий) имеют вид:  $\alpha = 0.000001$ , собственная вероятность  $p = 0.0062$ , биномиальная вероятность  $p^* = 0.001748$ . На график также нанесены только те значения логарифмической вероятности связей событий, которые соответствуют ядрам  $(M, N) = (\text{число протонов}, \text{число нейтронов})$ , встречающимся в природе.

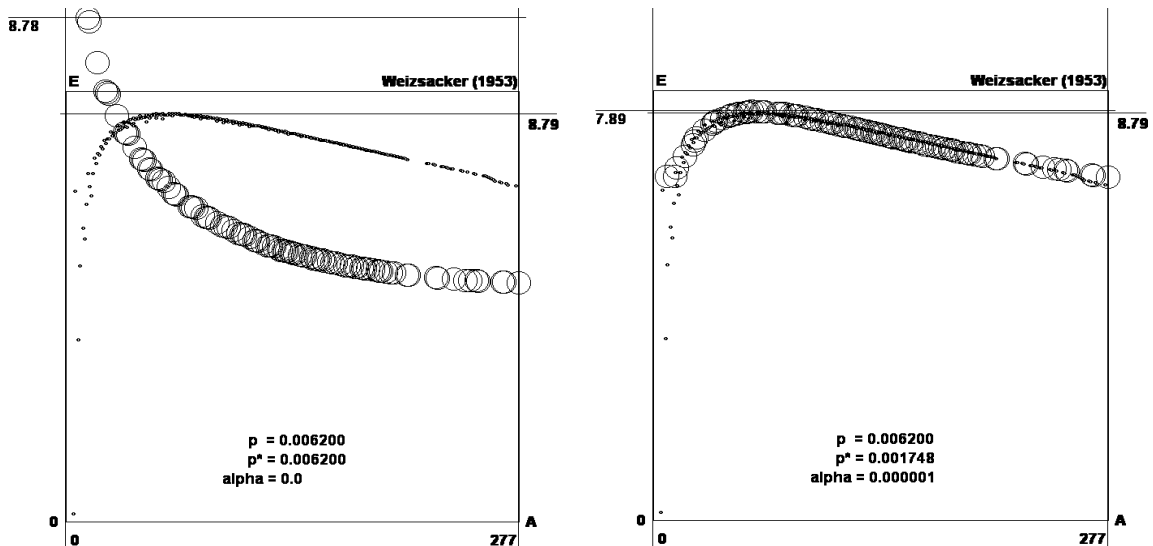


Рис. 3: Качественное сравнение зависимости удельной энергии связей нуклонов в ядре от массового числа  $A = Z + N$ , которая соответствует формуле Вайцеккера (Weizsacker, 1953), с зависимостью логарифмической удельной вероятности связей  $p$ -событий ( $p = 0.0062$ ) от числа событий для второй эвентологической модели ядра (большие кружки). Показаны значения физической и эвентологической характеристик для ядер  $(Z, N) = (\text{число протонов}, \text{число нейтронов})$ , встречающихся в природе. Слева: независимые строго симметричные случайные  $p$ -события. Справа: зависимые строго симметричные случайные  $p$ -события с распределением, параметры которого приведены в тексте работы.

## 4 ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Даже предварительный анализ рассмотренных типов статистических зависимостей строго симметричных случайных событий позволяет сделать вы-

вод о бросающейся в глаза аналогии между статистической эвентологией и физикой: статистическое взаимодействие множества случайных событий поразительным образом напоминает физическое взаимодействие системы материальных частиц.

Инспирированное физической аналогией понятие удельной вероятности связей событий в случайном множестве событий, с одной стороны, следует вслед за своим физическим аналогом рассматривать в качестве измерителя структуры статистических связей событий в случайном множестве. В эвентологии давно существуют другие подобные измерители, такие как ковариация взаимозависимостей событий и сила взаимодействия событий в случайном множестве. Любопытно, например, сравнить удельную вероятность связей строго симметричных случайных событий с соответствующими ковариациями по пересечению и по объединению, которые подробно рассмотрены в [5], где также приведены соответствующие графики зависимостей этих ковариаций от числа событий.

С другой стороны, на этот новый измеритель эвентологических связей можно взглянуть как на эвентологическое обоснование, толкование и интерпретацию его физического аналога — удельной энергии связей нуклонов в ядре. И то, и другое может дать толчок к развитию новых идей и направлений исследований как в эвентологии, так и в физике.

## Л И Т Е Р А Т У Р А

- [1] OREAR JAY (1967) *Fundamental Physics*. New York: John Wiley.
- [2] ВОРОБЬЁВ О.Ю. и др. (2003) *Теория случайных событий и ее применения*. Красноярск: ИВМ СО РАН, 502с.
- [3] ВОРОБЬЁВ О.Ю. (2003) Физические основания эвентологии. *Труды ФАМ'2003 конференции*. Красноярск: ИВМ СО РАН, 38–68.
- [4] ВОРОБЬЁВ О.Ю. (2003) Теоретические основания эвентологии. Структуры симметричных случайных событий. *Труды ФАМ'2003 конференции*. Красноярск: ИВМ СО РАН, 69-113.
- [5] ГОЛДЕНОК Е.Е. (2003) Измерение структуры связей событий распределением мощности случайного множества событий. *Труды ФАМ'2003 конференции*. Красноярск: ИВМ СО РАН, 125–143.