Теоретические основания эвентологии. Структуры симметричных событий

О.Ю. Воробьёв
Институт вычислительного моделирования СО РАН
Красноярский государственный университет
Академгородок, Красноярск, Россия, 660036
e-mail: vorob@akadem.ru, url: r-events.narod.ru

Аннотация

Эвентология тесно переплетается со многими разделами физики и метафизики. Ее концепция хорошо вписалась в круг идей, уже существовавших в математике и квантовой механике. И именно потому, что эвентология была с такой легкостью порождена теорией вероятностей, она стимулировала развитие и разработку тех вероятностных идей, с которыми у нее наблюдалось естественное "родство". Бо́льшая часть эвентологии состоит из фактов, которые могут быть описаны и представлены подобно другим явлениям окружающего нас мира. Эти факты могут быть строго выражены в теоремах или встречаться в их доказательствах. Они составляют ту теоретическую основу изучения распределений случайных событий, без которой немыслим ни физический, ни метафизический мир. Теоретическим основаниям эвентологии посвящена эта работа.

Мы будем иметь случай
предложить разложение материи
на структуры событий,
и даже сами события
будут успешно рассматриваться
как имеющие структуру.
Бертран Рассел

1 Введение

Недавно освоенное эвентологией понятие *удельной вероятности связей событий в случайном множестве событий* [4], которое имеет прозрачную физическую аналогию с удельной энергией связей нуклонов в ядре, довольно

Ключевые слова и фразы: симметричные случайные события, строго симметричные случайные события, распределение мощности случайного множества событий, вероятности пересечений событий, вероятности объединений событий, эвентологическая модель ядра, ядро случайного события, оболочка случайного события, ядерный каньон случайных событий, удельная вероятность связей событий, статистическая энергия события, удельная энергия связей нуклонов в ядре, формула Вайцзеккера.

естественным образом порождает вереницу новых понятий, также имеющих откровенные физические аналогии.

Чтобы детальнее разобраться в этих новшествах, требуется освоить некоторые простые, но вместе в тем довольно непривычные свойства случайных событий, и прежде всего свойства так называемых *симметричных* случайных событий. Подробное изучение свойств случайных событий, которые обладают теми или иными симметричными свойствами, позволило открыть весьма изящные соотношения между вероятностными распределениями пересечений и объединений случайных событий. О свойствах таких событий, а также о различных подходах к понятию симметрии случайных событий, которое оказалось на удивление простым и надежным основанием для построения и измерения структур взаимосвязей произвольно зависимых случайных событий, идет речь в данной работе.

2 Симметричные события и симметричные случайные множества событий

Представим вероятностное пространство

$$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$$

и некоторое конечное множество событий $\mathfrak{X}_A$, состоящее из A событий, взятых из алгебры $\mathcal{F}$:

$$\mathfrak{X}_A \subseteq \mathcal{F}.$$

Определим под $\mathfrak{X}_A$ *случайное множество наступивших событий*

$$K_A : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}) \to \left(2^{\mathfrak{X}_A}, 2^{2^{\mathfrak{X}_A}}\right),$$

возможными значениями которого служат подмножества наступивших событий $X \subseteq \mathfrak{X}_A$.

Распределение случайного множества наступивших событий K_A под $\mathfrak{X}_A$ может быть определено несколькими эквивалентными способами: при помощи задания для каждого $X \subseteq \mathfrak{X}_A$ *вероятностей пересечения*:

$$p(X) = \mathbf{P}(K_A = X) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{x \in X} x \bigcap_{x \in X^c} x^c\right),$$

надвероятностей пересечения:

$$p_X = \mathbf{P}(X \subseteq K_A) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{x \in X} x\right),$$

подвероятностей пересечения:

$$p^X = \mathbf{P}(K_A \subseteq X) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{x \in X^c} x^c\right),$$

вероятностей объединения:

$$u(X) = 1 - p(X^c) = \mathbf{P}(K_A \neq X^c) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{x \in X} x \bigcup_{x \in X^c} x^c\right),$$

надвероятностей объединения:

$$u_X = 1 - p^{X^c} = \mathbf{P}(K_A \not\subseteq X^c) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{x \in X} x\right),$$

подвероятностей объединения:

$$u^X = 1 - p_{X^c} = \mathbf{P}(X^c \not\subseteq K_A) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{x \in X^c} x^c\right).$$

2.1 Симметричные случайные события

Определение 1 (симметричные случайные события). Распределение случайного множества событий K_A под $\mathfrak{X}_A$ называется *симметричным относительно вероятности* $\mathbf{P}$, если пересечения равномощных подмножеств событий $X, Y \subseteq \mathfrak{X}_A$ равновероятны:

$$|X| = |Y| \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{P}\left(\bigcap_{x \in X} x\right) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{x \in Y} x\right). \tag{1}$$

Замечание (о равновероятности симметричных событий). Очевидно, что все симметричные события равновероятны:

$$\mathbf{P}(x) = p, \quad x \in \mathfrak{X}_A.$$

Действительно, по определению для любых $x, y \in \mathfrak{X}_A$

$$\mathbf{P}(x) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{x \in \{x\}} x\right) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{y \in \{y\}} y\right) = \mathbf{P}(y),$$

так как $|\{x\}| = |\{y\}| = 1$.

Замечание (о симметричных p-событиях). Поскольку симметричные случайные события равновероятны, т.е. наступают с некой одинаковой вероятностью p, будем для краткости называть их *симметричными p-событиями*.

А для случайного множества K_A симметричных p-событий будем иногда использовать более полное обозначение: $K_A = K(A, p)$.

Определение (собственная вероятность симметричных событий). Вероятность p называется *собственной вероятностью* симметричных p-событий.

Используя обозначения для надвероятностей пересечений

$$p_X = \mathbf{P}(X \subseteq K_A) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{x \in X} x\right), \quad X \in 2^{\mathfrak{X}_A},$$

соотношение (1), определяющее симметричные p-события, переписывается в следующем виде

$$|X| = |Y| \quad \Longrightarrow \quad p_X = p_Y. \tag{1'}$$

Ясно, что для симметричных p-событий вероятности p_X, как функции множеств X событий, зависят только от мощности $|X|$ этих множеств. Будем иногда обозначать $X_a \subseteq \mathfrak{X}_A$ подмножество событий мощности $a = |X_a|$, иначе говоря, a-подмножество событий. Определение симметричных p-событий позволяет ввести следующие обозначения для надвероятностей

$$p_{(|X|)} = p_X,$$

где $|X| \in \{0, \ldots, A\}$, когда $X \in 2^{\mathfrak{X}_A}$. Таким образом,

$$p_{(a)} = \mathbf{P}(X_a \subseteq K_A)$$

— вероятность того, что случайное множество K_A содержит некоторое подмножество X_a мощности a. Иначе говоря, $p_{(a)}$ — это функция целочисленного аргумента $a \in \{0, \ldots, A\}$ — значений мощности $|K_A|$ случайного множества событий K_A, которую мы будем называть *мощностной надвероятностью.*

Замечание (мощностные вероятности симметричных p-событий не возрастают). Так как набор надвероятностей $\{p_X,\ X \subseteq \mathfrak{X}_A\}$ определяет распределение случайного множества, то распределение случайного множества K_A симметричных p-событий определяется набором из $(A+1)$-ой мощностной надвероятности:

$$\{p_{(0)}, p_{(1)}, \ldots, p_{(A)}\}.$$

Так как у любых случайных множеств событий

$$X \subseteq Y \quad \Longrightarrow \quad p_X \geq p_Y,$$

то мощностные надвероятности $p_{(a)}$ симметричных p-событий — это не возрастающие функции аргумента a:

$$p_{(0)} \geq p_{(1)} \geq \dots \geq p_{(A)}.$$

Определение 2 (мощность случайного множества событий и ее распределение). *Мощность случайного множества событий* K_A под $\mathfrak{X}_A$ — это целочисленная случайная величина

$$|K_A| : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}) \to \left(\{0, \dots, A\}, 2^{\{0,\dots,A\}}\right),$$

с конечным множеством значений $\{0, \dots, A\}$. *Распределение мощности* $|K_A|$ определяется случайным множеством событий K_A:

$$\pi_A(a) = \mathbf{P}(|K_A| = a) = \mathbf{P}\left(K_A \in C^a_{\mathfrak{X}_A}\right) = \sum_{X \in C^a_{\mathfrak{X}_A}} p(X), \quad a \in \{0, \dots, A\},$$

где

$$C^a_{\mathfrak{X}_A} = \{X \subseteq \mathfrak{X}_A : |X| = a\}$$

— так называемый a-слой равномощных подмножеств, состоящих из a событий[1].

Определение 1′ (слойно-равновероятные случайные события). Говорят, что случайное множество событий K_A под $\mathfrak{X}_A$ имеет *слойно-равновероятное* распределение всякий раз, когда оно определяется распределением своей мощности

$$\pi_A(a) = \mathbf{P}(|K_A| = a), \quad a \in \{0, \dots, A\},$$

иначе говоря, распределением вероятностей между a-слоями подмножеств событий:

$$\pi_A(a) = \mathbf{P}\left(K_A \in C^a_{\mathfrak{X}_A}\right), \quad a = 0, \dots, A,$$

и предположением, что "внутри" каждого a-слоя $C^a_{\mathfrak{X}_A}$ подмножества наступающих событий равновероятны:

$$\mathbf{P}\left(K_A = X \mid K_A \in C^a_{\mathfrak{X}_A}\right) = \begin{cases} \frac{1}{C^a_A}, & X \in C^a_{\mathfrak{X}_A}, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Лемма 1. *Случайное множество событий имеет симметричное распределение всякий раз, когда его распределение слойно-равновероятно.*

[1]Такие подмножества, состоящие из a событий, называются *a-подмножествами.*

Доказательство очевидно следует из определения 1'. Действительно, в силу этого определения слойно-равновероятное распределение имеет вид:

$$p(X) = \mathbf{P}(K_A = X) = \mathbf{P}\left(K_A = X \mid X \in C^{|X|}_{\mathfrak{X}_A}\right) \mathbf{P}\left(K_A \in C^{|X|}_{\mathfrak{X}_A}\right) =$$

$$= \frac{\pi_A(|X|)}{C^{|X|}_A}, \quad X \in 2^{\mathfrak{X}_A}.$$

Но это попросту означает, что для любых a-подмножеств событий X_a, Y_a, принадлежащих a-слою $C^a_{\mathfrak{X}_A}$,

$$p(X_a) = \mathbf{P}(K_A = X_a) = \frac{\pi_A(a)}{C^a_A} = \mathbf{P}(K_A = Y_a) = p(Y_a),$$

— наступление равномощных подмножеств событий равновероятно. В силу определения 1 такое случайное множество имеет симметричное распределение. Таким образом, определения 1 и 1' эквивалентны, а термины *симметричное* и *слойно-равновероятное* случайное множество событий не более, чем синонимы. Лемма 1 доказана.

Лемма 2 (о распределениях вероятностей симметричного случайного множества событий). *Симметричное случайное множество K_A под $\mathfrak{X}_A$ имеет следующие распределения вероятностей пересечений событий*:

$$p(X) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{x \in X} x \bigcap_{x \in X^c} x^c\right) = \frac{1}{C^{|X|}_A} \pi_A(|X|), \tag{$\bigcirc$}$$

надвероятностей пересечений событий:

$$p_X = \mathbf{P}\left(\bigcap_{x \in X} x\right) = \frac{1}{C^{|X|}_A} \mathbf{E} C^{|X|}_{|K_A|}, \tag{$\triangle$}$$

подвероятностей пересечений событий:

$$p^X = \mathbf{P}\left(\bigcap_{x \in X^c} x^c\right) = \frac{1}{C^{|X|}_A} \mathbf{E} C^{|X^c|}_{|K^c_A|}, \tag{$\bigtriangledown$}$$

а также следующие распределения вероятностей объединений событий:

$$u(X) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{x \in X} x \bigcup_{x \in X^c} x^c\right) = 1 - \frac{1}{C^{|X^c|}_A} \pi_A(|X^c|), \tag{$\bigcirc\bigcirc$}$$

надвероятностей объединений событий:

$$u_X = \mathbf{P}\left(\bigcup_{x \in X} x\right) = 1 - \frac{1}{C^{|X^c|}_A} \mathbf{E} C^{|X|}_{|K^c_A|}, \tag{$\triangle\triangle$}$$

подвероятностей объединений событий:

$$u^X = \mathbf{P}\left(\bigcup_{x \in X^c} x^c\right) = 1 - \frac{1}{C_A^{|X^c|}} \mathbf{E} C_{|K_A|}^{|X^c|}, \qquad (\bigtriangledown\bigtriangledown)$$

где $X \in 2^{\mathfrak{X}_A}$, $K_A^c = \mathfrak{X}_A \setminus K_A$ *— дополнение случайного множества событий* K_A, *а* $|K_A^c| = A - |K_A|$.

Доказательство. Утверждение ($\bigcirc$) доказано в лемме 3. Остальные утверждения доказываются аналогично.

2.2 Проекция симметричного случайного множества событий на подмножество событий

Рассмотрим вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ и определим под множеством событий $\mathfrak{X}_A \subseteq \mathcal{F}$ случайное множество

$$K(A,p) : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}) \to \left(2^{\mathfrak{X}_A}, 2^{2^{\mathfrak{X}_A}}\right)$$

симметричных p-событий.

Как и любое случайное множество событий, определенное под $\mathfrak{X}_A$, симметричное случайное множество K_A p-событий порождает под каждым подмножеством $X \subseteq \mathfrak{X}_A$ случайное множество

$$K_X = K_A \cap X$$

с распределением:

$$\mathbf{P}(K_X = Y) = \mathbf{P}(K_A \cap X = Y) = \sum_{Z \cap X = Y} \mathbf{P}(K_A = Z), \quad Y \subseteq X,$$

и соответствующим распределением мощности

$$\pi_X(i) = \mathbf{P}(|K_X| = i), \quad i = 0, \ldots, |X|.$$

Определение (проекция симметричного случайного множества событий). Для любого a-подмножества $X_a \subseteq \mathfrak{X}_A$ обозначим $K(a,p)$ — так называемую *проекцию* $K(A,p)$ *на подмножество* $X_a \subseteq \mathfrak{X}_A$:

$$K(a,p) = K(A,p) \cap X_a.$$

Ясно, что *проекция*

$$K(a,p) : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}) \to \left(2^{X_a}, 2^{2^{X_a}}\right)$$

— это случайное множество симметричных p-событий, определенное под X_a, и его распределение определяется исходным случайным множеством $K(A,p)$.

2.3 Подмножества симметричных p-событий

Оказывается, что для симметричного случайного множества справедлива

Лемма 3 (о распределениях мощности проекций симметричного случайного множества событий). *Проекции симметричного случайного множества на равномощные подмножества имеют одинаковые распределения мощности.*

Доказательство. В формулировке леммы речь идет о проекциях K_A на a-подмножества X_a, т.е. о случайных множествах симметричных p-событий

$$K_a = K_A \cap X_a,$$

каждое из которых определено под неким фиксированным a-подмножеством $X_a \subseteq \mathfrak{X}_A$ всякий раз, когда под $\mathfrak{X}_A$ определено K_A. Случайное множество K_a определяется под X_a распределением вероятностей

$$\mathbf{P}\left(K_A \cap X_a = X_i\right) = \mathbf{P}\left(K_a = X_i\right),$$

где $X_i \subseteq X_a$ — произвольное i-подмножество множества $X_a \subseteq \mathfrak{X}_A$, а распределение мощностей этого случайного множества — это набор вероятностей:

$$\pi_{X_a}(i) = \mathbf{P}\left(|K_a| = i\right), \quad i = 0, \ldots, a. \qquad (\times)$$

Фактически в лемме утверждается, что для любых X_a вероятности $(\times)$ зависят не от a-подмножества X_a, а лишь от его мощности a. Иначе говоря, под любым X_a распределение мощности случайного множества $K_a = K_A \cap X_a$ имеет один и тот же вид:

$$\pi_a(i) = \mathbf{P}\left(|K_a| = i\right), \quad i = 0, \ldots, a. \qquad (\times\times)$$

Идея доказательства в том, что поскольку у симметричного случайного множества K_A пересечения равномощных подмножеств событий равновероятны, то распределения вероятностей пересечений для случайных множеств $K_a = K_A \cap X_a$ будут состоять из одних и тех же наборов значений, которые определяют одно и то же распределение мощности K_a под любым a-подмножеством $X_a \subseteq \mathfrak{X}_A$. Доказательство существенно использует формулы обращения Мёбиуса. Основные из этих формул, которые связывают между собой p_X — вероятности пересечения, u_X — вероятности объединения и $p(X)$ — вероятности наступления событий, приведены в разделе **??**.

Итак, рассмотрим набор вероятностей пересечений

$$p_X = \mathbf{P}\left(\bigcap_{x \in X} x\right), \quad X \subseteq X_a,$$

определяющий распределение случайного множества K_a под X_a, и набор

$$p'_Y = \mathbf{P}\left(\bigcap_{x \in Y} x\right), \quad Y \subseteq Y_a,$$

определяющий распределение другого случайного множества K'_a под Y_a той же мощности a. По определению симметричного случайного множества p-событий

$$|X| = |Y| \quad \Longrightarrow \quad p_X = p'_Y.$$

Таким образом,

$$p_X = p_{|X|}, \quad p_Y = p_{|Y|}$$

— надвероятности являются функциями мощности множеств, а не самих множеств. Следовательно, и случайное множество K_a, и случайное множество K'_a определяются еще и наборами вероятностей, которые связаны с надвероятностями формулами обращения Мёбиуса:

$$p(X) = \sum_{X \subseteq Z} (-1)^{|Z|-|X|} p_Z, \quad X \subseteq X_a,$$

$$p'(Y) = \sum_{Y \subseteq Z} (-1)^{|Z|-|Y|} p'_Z, \quad Y \subseteq Y_a.$$

Если учесть, что надвероятности — это функции мощности множеств, то эти формулы можно переписать в виде:

$$p_a(i) = p(X_i) = \sum_{X_i \leq Z_j} (-1)^{i-j} p_{Z_j} = \sum_{i \leq j} (-1)^{i-j} C_{a-i}^{j-i} p_{(j)}, \quad i = 0, \ldots, a,$$

$$p'_a(i) = p'(Y_i) = \sum_{X_i \leq Z_j} (-1)^{i-j} p'_{Z_j} = \sum_{i \leq j} (-1)^{i-j} C_{a-i}^{j-i} p'_{(j)}, \quad i = 0, \ldots, a,$$

из которого очевидно, что распределения вероятностей случайных множеств совпадают: $p_a(i) = p'_a(i),\ i = 0, \ldots, a$, поскольку определяются одинаковыми наборами надвероятностей: $p_{(j)} = p'_{(j)},\ j = 0, \ldots, a$. Отсюда следует, что и распределения мощностей этих случайных множеств K_a и K'_a совпадают: $\pi_a(i) = \pi'_A(i),\ i = 0, \ldots, a$, так как

$$\pi_a(i) = C_a^i p_a(i), \quad \pi'_a(i) = C_a^i p'_a(i), \quad i = 0, \ldots, a.$$

Лемма 3 доказана.

Следствие 1. *Наступления равномощных подмножеств событий $X, Y \subseteq X_a$ равновероятны:*

$$|X| = |Y| \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{P}\left(\bigcap_{x \in X} x \bigcap_{x \in X_a \setminus X} x^c\right) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{x \in Y} x \bigcap_{x \in Y_a \setminus Y} x^c\right). \qquad (\star)$$

Доказательство. В лемме показано, что $p_a(i) = p'_a(i)$ для случайных множеств симметричных p-событий K_a под X_a и K'_a под Y_a. Но это эквивалентно тому, что если $X_i \subseteq X_a$, $Y_i \subseteq Y_a$, то

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{x\in X_i} x \bigcap_{x\in X_a\setminus X_i} x^c\right) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{x\in Y_i} x \bigcap_{x\in Y_a\setminus Y_i} x^c\right).$$

Но это то же самое, что ($\star$). Следствие доказано.

Следствие 2. *Пересечения равномощных подмножеств дополнений симметричных p-событий равновероятны:*

$$|X| = |Y| \quad\Longrightarrow\quad \mathbf{P}\left(\bigcap_{x\in X} x^c\right) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{x\in Y} x^c\right). \qquad (\star\star)$$

Доказательство. ($\star\star$) следует из ($\star$) при $X = Y = \emptyset$.

Лемма 4 (свойства случайных множеств симметричных p-событий). *Пусть K_A под $\mathfrak{X}_A$ — случайное множество симметричных p-событий, тогда:*

$$|X| = |Y| \quad\Longrightarrow\quad \mathbf{P}\left(\bigcup_{x\in X} x\right) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{x\in Y} x\right), \qquad (5:1)$$

$$|X| = |Y| \quad\Longrightarrow\quad \mathbf{P}\left(\bigcap_{x\in X} x^c\right) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{x\in Y} x^c\right), \qquad (5:2)$$

$$|X| = |Y| \quad\Longrightarrow\quad \mathbf{P}\left(\bigcup_{x\in X} x^c\right) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{x\in Y} x^c\right). \qquad (5:3)$$

Иначе говоря, пересечения или объединения подмножеств симметричных p-событий x или их дополнений x^c равновероятны, если эти подмножества равномощны.

Доказательство. Сначала заметим, что утверждение (5:2) — это не что иное, как следствие 2 из леммы 3, которое уже доказано.

Утверждение (5:1) следует из (5:2), если воспользоваться правилами де Моргана, из которых следует, что:

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{x\in X} x\right) = 1 - \mathbf{P}\left(\bigcap_{x\in X} x^c\right).$$

Утверждение (5:3) следует из определения симметричных p-событий и тех же правил де Моргана:

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{x\in X} x^c\right) = 1 - \mathbf{P}\left(\bigcap_{x\in X} x\right).$$

Лемма 4 доказана.

Замечание (о корректности обозначений). Доказанные утверждения позволяют ввести корректное обозначение для

$$u_{(a)} = u_{X_a} = \mathbf{P}\left(\bigcup_{x \in X_a} x\right), \quad a = 0, \ldots, A,$$

— вероятностей объединений конкретного множества X_a, состоящего из a симметричных событий. Заметим еще, что

$$u_{(a)} = \mathbf{P}\left(K_A \not\subseteq X_a^c\right)$$

— это вероятность того, что случайное множество K_A не содержится в $(A-a)$-подмножестве X_a^c, состоящем из $(A-a)$ симметричных p-событий, так как $|X_a^c| = |\mathfrak{X}_A \setminus X_a| = A - a$. Кроме того, можно корректно обозначать

$$p_A(a) = p(X_a) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{x \in X_a} x \bigcap_{x \in \mathfrak{X}_A \setminus X_a} x^c\right), \quad a = 0, \ldots, A,$$

— вероятности наступления конкретного множества X_a, состоящего из a симметричных событий. Заметим также, что

$$p_A(a) = \mathbf{P}\left(K_A = X_a\right)$$

— это вероятность того, что наступило конкретное подмножество событий $X_a \subseteq \mathfrak{X}_A$.

2.4 Мощностные распределения случайного множества симметричных событий

Определение (мощностные вероятности и распределения случайного множества симметричных событий). Распределения вероятностей $p_A(a)$, $p_{(a)}$, $u_{(a)}$, $\pi_A(a)$, $a = 0, \ldots, A$, а также другие распределения случайного множества симметричных событий, значения вероятностей в которых, как функций подмножеств $X \subseteq \mathfrak{X}_A$, определяются не этими множествами, а их мощностью $|X|$, будем называть *мощностными распределениями*, а вероятности из этих распределений — *мощностными вероятностями*.

Лемма 4′ (о характеристическом свойстве симметричных случайных множеств событий). *Случайное множество событий K_A под $\mathfrak{X}_A$ имеет симметричное распределение всякий раз, когда распределение его вероятностей*

$$p(X) = \mathbf{P}(K_A = X)$$

зависит только от мощности $|X|$, *а не от самих подмножеств* $X \subseteq \mathfrak{X}_A$:

$$p(X) = p(|X|), \quad X \subseteq \mathfrak{X}_A.$$

Доказательство следует из определения и основных свойств симметричных событий (леммы 3 и 4).

Для мощностных распределений справедливо довольно обычное, но полезное

Утверждение (о выпуклой комбинации мощностных распределений). *Если* $f'(a)$ *и* $f''(a)$ — *два мощностных распределения одного из перечисленных типов, то их выпуклая комбинация*

$$f(a) = \alpha f'(a) + (1-\alpha)f''(a)$$

также является легитимным мощностным распределением того же типа.

Доказательство. Докажем утверждение для мощностных вероятностей объединений

$$u_{(a)} = \mathbf{P}\left(\bigcup_{x \in X_a} x\right), \quad a = 0, \ldots, A.$$

Пусть $u'_{(a)}$ и $u''_{(a)}$ — два произвольных мощностных распределения вероятностей объединения, тогда их выпуклая комбинация

$$u_{(a)} = \alpha u'_{(a)} + (1-\alpha)u''_{(a)} \tag{$*$}$$

является легитимным мощностным распределением вероятностей объединения.

Проще всего убедиться в легитимности мощностного распределения вероятностей наступления

$$p_A(a) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{x \in X_a} x \bigcap_{x \in X_a^c} x^c\right), \quad a = 0, \ldots, A,$$

поскольку они должны удовлетворять простому условию нормировки

$$\sum_{a=0}^{A} C_A^a p_A(a) = 1.$$

Заметим, что выпуклая комбинация $(*)$ может быть записана в эквивалентном виде

$$1 - u_{(a)} = \alpha(1 - u'_{(a)}) + (1-\alpha)(1 - u''_{(a)}). \tag{$**$}$$

Из формул обращения Мёбиуса для мощностных вероятностей получаем

$$p_A(a) = \sum_{A-a \le i \le A} (-1)^{i-A+a} C_a^{A-i} (\alpha(1-u'_{(a)}) + (1-\alpha)(1-u''_{(a)})) =$$

$$= \alpha p'_A(a) + (1-\alpha) p''_A(a).$$

Отсюда ясно, что для любых легитимных $p'_A(a)$ и $p''_A(a)$ мощностные вероятности $p_A(a)$ также легитимны, поскольку $0 \le p_A(a) \le 1$ и

$$\sum_{a=0}^{A} C_A^a p_A(a) = \alpha \sum_{a=0}^{A} C_A^a p'_A(a) + (1-\alpha) \sum_{a=0}^{A} C_A^a p''_A(a) = 1.$$

Утверждение доказано.

2.5 Рекуррентные свойства симметричных случайных событий

Пусть под $\mathfrak{X}_A$ задано симметричное случайное множество событий K_A с распределением мощности

$$\pi_A(a) = \mathbf{P}(|K_A| = a), \quad a = 0, \dots, A,$$

которое определяет на a-подмножествах $X_a \subseteq \mathfrak{X}_A$ свои проекции

$$K_a = K_A \cap X_a, \quad a = 0, \dots, A,$$

с распределениями мощностей

$$\pi_a(m) = \mathbf{P}(|K_a| = m), \quad m = 0, \dots, a.$$

Заметим, что симметричное случайное множество событий K_A можно определить под $\mathfrak{X}_A$ любым из трех распределений мощностных вероятностей:

$$\{u_{(a)},\ a = 0, \dots, A\}, \quad \{p_{(a)},\ a = 0, \dots, A\}, \quad \{p_A(a),\ a = 0, \dots, A\},$$

которые выражаются друг через друга формулами обращения Мёбиуса (см. раздел **??**). К этим распределениям мощностных вероятностей можно добавить и распределение мощности K_A, связанное, например, с мощностными вероятностями $p_A(a)$ простыми соотношениями:

$$\pi_A(a) = C_A^a p_A(a), \quad a = 0, \dots, A,$$

Изобразим семейство распределений мощности

$$\{\pi_a(m),\ m = 0, \dots, a\}, \quad a = 0, \dots, A,$$

всех проекций K_a симметричного случайного множества событий K_A в виде матрицы размером $(A+1)\times(A+1)$:

$$\begin{pmatrix} \pi_0(0) & - & - & - & - & - & - \\ \pi_1(0) & \pi_1(1) & - & - & - & - & - \\ \pi_2(0) & \pi_2(1) & \pi_2(2) & - & - & - & - \\ \dots & \dots & \dots & \dots & - & - & - \\ \pi_a(0) & \pi_a(1) & \dots & \dots & \pi_a(a) & - & - \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & - \\ \pi_A(0) & \pi_A(1) & \dots & \dots & \pi_A(a) & \dots & \pi_A(A) \end{pmatrix},$$

в a-строке которой расположено распределение мощности a-й проекции K_a. Напомним, что для $a = 0, \dots, A$

$$\pi_a(0) = 1 - u_{(a)}, \qquad \pi_a(a) = p_{(a)},$$

$$\pi_0(0) = 1 - u_{(0)} = p_{(0)} = 1$$

$$\pi_1(0) = 1 - u_{(1)} = 1 - p, \qquad \pi_1(1) = p_{(1)} = p.$$

Таким образом, в силу самых общих положений о задании распределения случайного множества событий (основанных на формулах обращения Мёбиуса) рассматриваемая матрица может быть полностью "восстановлена" либо по нулевому столбцу (по распределению мощностных вероятностей объединений $u_{(a)}$):

$$\begin{pmatrix} 1 & - & - & - & - & - & - \\ 1-p & p & - & - & - & - & - \\ 1-u_{(2)} & \dots & \dots & - & - & - & - \\ \dots & \dots & \dots & \dots & - & - & - \\ 1-u_{(a)} & \dots & \dots & \dots & \dots & - & - \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & - \\ 1-u_{(A)} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

либо по главной диагонали (по распределению мощностных вероятностей пересечений $p_{(a)}$):

$$\begin{pmatrix} 1 & - & - & - & - & - & - \\ 1-p & p & - & - & - & - & - \\ \dots & \dots & p_{(2)} & - & - & - & - \\ \dots & \dots & \dots & \dots & - & - & - \\ \dots & \dots & \dots & \dots & p_{(a)} & - & - \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & - \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & p_{(A)} \end{pmatrix},$$

либо по нижней строке (по распределению мощности $\pi_A(a)$):

$$\begin{pmatrix}
1 & - & - & - & - & - & - \\
1-p & p & - & - & - & - & - \\
\dots & \dots & \dots & - & - & - & - \\
\dots & \dots & \dots & \dots & - & - & - \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & - & - \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & - \\
\pi_A(0) & \pi_A(1) & \pi_A(2) & \dots & \pi_A(a) & \dots & \pi_A(A)
\end{pmatrix}.$$

Хотя обращение Мёбиуса — это универсальный метод, позволяющий выразить одни мощностные распределения симметричного случайного множества событий через другие, для более детального представления о том, как распределения мощностей проекций K_a рекуррентно связаны с распределением самого симметричного случайного множества K_A, иногда полезны некоторые частные рекуррентные формулы, следующие, разумеется, из общего обращения Мёбиуса. Подобные полезные рекурсии приведены в техническом разделе 2.6.

2.6 Частные рекурретные формулы для симметричных событий

Попытаемся рекуррентно выразить распределения мощности

$$\pi_a(m) = \mathbf{P}(|K_a| = m), \quad m \in \{0, \dots, a\},$$

проекций $K_a = K(a, p),\ a \in \{0, \dots, A\}$ через мощностные вероятности объединений:

$$u_{(a)} = \mathbf{P}\left(\bigcup_{x \in X_a} x\right) = \mathbf{P}\left(K_a \not\subseteq X_a^c\right), \quad a \in \{0, \dots, A\},$$

а также через мощностные вероятности пересечений:

$$p_{(a)} = \mathbf{P}\left(\bigcap_{x \in X_a} x\right) = \mathbf{P}\left(X_a \subseteq K_a\right), \quad a \in \{0, \dots, A\}.$$

Начнем с двух известных наблюдений. Во-первых,

$$u_{(a)} = \mathbf{P}(|K_a| \geq 1) = 1 - \mathbf{P}(|K_a| = 0) = 1 - \pi_a(0). \tag{1}$$

Во-вторых,

$$\mathbf{P}(|K_a| \geq 1) - \mathbf{P}(|K_{a-1}| \geq 1) = \frac{1}{a}\mathbf{P}(|K_a| = 1) = \frac{1}{a}\pi_a(1), \tag{2}$$

или, что то же самое:

$$u_{(a)} - u_{(a-1)} = \frac{1}{a}\mathbf{P}(|K_a| = 1) = \frac{1}{a}\pi_a(1).$$

Таким образом, две вероятности из распределения мощности случайного множества K_a уже выражены рекуррентно через вероятности объединений. Попытаемся по аналогии с (2) показать, что справедлива более общая

Лемма 6. *Для $m = 0, \ldots, a$ выполнено*

$$\mathbf{P}(|K_a| \geq m) - \mathbf{P}(|K_{a-1}| \geq m) = \frac{m}{a}\mathbf{P}(|K_a| = m) = \frac{m}{a}\pi_a(m). \tag{3}$$

Доказательство. Рассмотрим $(a-1)$-подмножество $X_{a-1} \subset \mathfrak{X}_A$, состоящее из $(a-1)$-го симметричного p-события. Добавив к X_{a-1} еще одно симметричное p-событие $x \notin X_{a-1}$, получим a-подмножество

$$X_a = X_{a-1} + x,$$

состоящее из a симметричных p-событий. При этом

$$\bigcup_{y \in X_a} y = \bigcup_{y \in X_{a-1}+x} y = x \cup \left(\bigcup_{y \in X_{a-1}} y \right),$$

или, что то же самое:

$$C^{\geq 1}_{X_a} = x \cup C^{\geq 1}_{X_{a-1}} = C^{\geq 1}_{X_{a-1}} + x \cap \left(C^{\geq 1}_{X_{a-1}}\right)^c = C^{\geq 1}_{X_{a-1}} + x \cap C^0_{X_{a-1}}. \tag{4}$$

Очевидно, что (4) легко обобщить:

$$C^{\geq m}_{X_a} = C^{\geq m}_{X_{a-1}} + x \cap C^{m-1}_{X_{a-1}}. \tag{5}$$

Отсюда ясно, что

$$\mathbf{P}\left(C^{\geq m}_{X_a} \setminus C^{\geq m}_{X_{a-1}}\right) = \mathbf{P}\left(x \cap C^{m-1}_{X_{a-1}}\right), \tag{6}$$

или, что то же:

$$\mathbf{P}\left(C^{\geq m}_{X_a}\right) - \mathbf{P}\left(C^{\geq m}_{X_{a-1}}\right) = \mathbf{P}\left(x \cap C^{m-1}_{X_{a-1}}\right). \tag{7}$$

Поскольку вероятность в левой части равна

$$\mathbf{P}\left(C^{\geq m}_{X_a}\right) - \mathbf{P}\left(C^{\geq m}_{X_{a-1}}\right) = \mathbf{P}(|K_a| \geq m) - \mathbf{P}(|K_{a-1}| \geq m) \tag{8}$$

— левой части доказываемого равенства (3), то осталось только показать, что равны правые части тех же равенств (3) и (7):

$$\mathbf{P}\left(x \cap C_{X_{a-1}}^{m-1}\right) = \frac{m}{a}\mathbf{P}\left(C_{X_a}^{m}\right) = \frac{m}{a}\mathbf{P}(|K_a| = m). \tag{9}$$

Действительно, если обозначить

$$p_a(m) = \mathbf{P}\left(K_a = X_m\right), \quad X_m \in C_{X_a}^m,$$

то

$$\mathbf{P}\left(C_{X_a}^m\right) = C_a^m p_a(m), \tag{10}$$

в силу определения симметричных p-событий о равновероятности объединений и пересечений равномощных подмножеств этих событий. Если теперь "новое" событие x пересечь с $(m-1)$-слоем элементарных событий, который состоит из C_{a-1}^{m-1} пересечений "старых"событий, вероятность каждого из которых равна $p_{a-1}(m)$, то в результате получится ровно столько же m-пересечений, вероятность каждого из которых, однако, уже равна $p_a(m)$. Иначе говоря, вероятность в левой части (7) равна

$$\mathbf{P}\left(x \cap C_{X_{a-1}}^{m-1}\right) = C_{a-1}^{m-1} p_a(m). \tag{11}$$

Окончательно, вместо (9), при помощи (10) и (11) получаем очевидное тождество

$$C_{a-1}^{m-1} p_a(m) = \frac{m}{a} C_a^m p_a(m),$$

которое доказывает лемму.

Следствие 1. *Вероятность $\pi_a(m)$ из распределения мощности случайного множества K_a можно выразить через "предыдущие" вероятности $\pi_a(i)$ и $\pi_{a-1}(i)$, $i < m$ по рекуррентной формуле:*

$$\sum_{i<m} \left(\pi_{a-1}(i) - \pi_a(i)\right) = \frac{m}{a}\pi_a(m). \tag{12}$$

Доказательство. Формула (12) легко получается из (3), если вспомнить, что

$$\mathbf{P}(|K_a| \geq m) = 1 - \mathbf{P}(|K_a| < m) = 1 - \sum_{i<m} \pi_a(i)$$

и для пущей убедительности взглянуть на схему распределений мощностей, изображенную в виде следующей матрицы:

$$\begin{pmatrix}
\pi_0(0) & - & - & - & - & - & - & - & - & - \\
\pi_1(0) & \pi_1(1) & - & - & - & - & - & - & - & - \\
\dots & \dots & \dots & - & - & - & - & - & - & - \\
\pi_{m-1}(0) & \pi_{m-1}(1) & \dots & \pi_{m-1}(m-1) & - & - & - & - & - & - \\
\pi_m(0) & \pi_m(1) & \dots & \pi_m(m-1) & \pi_m(m) & - & - & - & - & - \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & - & - & - & - \\
\boldsymbol{\pi}_{\mathbf{a-1}}(\mathbf{0}) & \boldsymbol{\pi}_{\mathbf{a-1}}(\mathbf{1}) & \dots & \boldsymbol{\pi}_{\mathbf{a-1}}(\mathbf{m-1}) & \pi_{a-1}(m) & \dots & \pi_{a-1}(a-1) & - & - & - \\
\boldsymbol{\pi}_{\mathbf{a}}(\mathbf{0}) & \boldsymbol{\pi}_{\mathbf{a}}(\mathbf{1}) & \dots & \boldsymbol{\pi}_{\mathbf{a}}(\mathbf{m-1}) & \boxed{\boldsymbol{\pi}_{\mathbf{a}}(\mathbf{m})} & \dots & \pi_a(a-1) & \pi_a(a) & - & - \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & - \\
\pi_A(0) & \pi_A(1) & \dots & \pi_A(m-1) & \pi_A(m) & \dots & \pi_A(a-1) & \pi_A(a) & \dots & \pi_A(A)
\end{pmatrix},$$

— в строках которой расположены вероятности из распределений мощностей случайных множеств событий $K_a = K(a,p)$, определенных под a-множествами $X_a \subseteq \mathfrak{X}_A$, $a = 0,\dots,A$. Заметьте, что в левом верхнем углу матрицы — на месте, предназначенном для $\pi_0(0)$, всегда стоит 1, так как по определению полагается: $\pi_0(0) = \mathbf{P}(|K_0| = 0) = 1$. Элементы матрицы, участвующие в рекуррентном соотношении (12), выделены жирным шрифтом. Вероятность из правой части (12) отмечена рамкой.

Следствие 2. *Вероятность $\pi_a(m)$ из распределения мощности случайного множества K_a можно выразить через "последующие" вероятности $\pi_a(i)$ и $\pi_{a-1}(i-1)$, $m < i$ по рекуррентной формуле:*

$$\left(1 - \frac{m}{a}\right)\pi_a(m) = \sum_{m<i} \left(\pi_{a-1}(i-1) - \pi_a(i)\right). \tag{13}$$

Доказательство. Формула (13) получается из (12), если заметить, что

$$\sum_{i<m} \left(\pi_{a-1}(i) - \pi_a(i)\right) + \sum_{m<i} \left(\pi_{a-1}(i-1) - \pi_a(i)\right) = \pi_a(m).$$

Матрица с выделенными жирным шрифтом вероятностями, участвующими в рекуррентном соотношении (13), имеет вид:

$$\begin{pmatrix}
\pi_0(0) & - & - & - & - & - & - & - & - & - \\
\pi_1(0) & \pi_1(1) & - & - & - & - & - & - & - & - \\
\dots & \dots & \dots & - & - & - & - & - & - & - \\
\pi_{m-1}(0) & \pi_{m-1}(1) & \dots & \pi_{m-1}(m-1) & - & - & - & - & - & - \\
\pi_m(0) & \pi_m(1) & \dots & \pi_m(m-1) & \pi_m(m) & - & - & - & - & - \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & - & - & - & - \\
\pi_{a-1}(0) & \pi_{a-1}(1) & \dots & \pi_{a-1}(m-1) & \boldsymbol{\pi}_{\mathbf{a-1}}(\mathbf{m}) & \dots & \boldsymbol{\pi}_{\mathbf{a-1}}(\mathbf{a-1}) & - & - & - \\
\pi_a(0) & \pi_a(1) & \dots & \pi_a(m-1) & \boxed{\boldsymbol{\pi}_{\mathbf{a}}(\mathbf{m})} & \dots & \boldsymbol{\pi}_{\mathbf{a}}(\mathbf{a-1}) & \boldsymbol{\pi}_{\mathbf{a}}(\mathbf{a}) & - & - \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & - \\
\pi_A(0) & \pi_A(1) & \dots & \pi_A(m-1) & \pi_A(m) & \dots & \pi_A(a-1) & \pi_A(a) & \dots & \pi_A(A)
\end{pmatrix}.$$

Вероятность из левой части (13) отмечена рамкой.

2.7 Слойная структура пространства симметричных случайных событий

Договоримся использовать одинаковые обозначения для подмножеств $W \subseteq 2^{X_a}$ и подмножеств (случайных событий) $K_a^{-1}(W) \subseteq \Omega$ — прообразов W при измеримом отображении

$$K_a : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}) \to \left(2^{X_a}, 2^{2^{X_a}}\right).$$

Данное измеримое отображение по определению есть не что иное, как случайное множество $K(a,p)$ симметричных p-событий под X_a. В частности, будем одинаково обозначать и называть следующие подмножества:

$$C_{X_a}^m = \{X \in 2^{X_a} : |X| = m\} \subseteq 2^{X_a},$$

— *m-слой подмножеств множества* X_a, и

$$C_{X_a}^m = \{w \in \Omega : \sum_{x \in X_a} \mathbf{1}_x(\omega) = m\} \subseteq \Omega,$$

— *m-слой элементарных событий из* Ω.

Как всегда, будем использовать одно обозначение и для вероятностей, определенных на алгебрах $\mathcal{F}$ и $2^{2^{X_a}}$. Такие соглашения не могут привести к противоречиям в исчислении вероятностей, поскольку по определению $\left(\mathcal{F}, 2^{2^{X_a}}\right)$-измеримого отображения (каковым является K_a) вероятность $\mathbf{P}$ определяется на $2^{2^{X_a}}$ (индуцируется с $\mathcal{F}$ на $2^{2^{X_a}}$) соотношением:

$$\mathbf{P}\left\{X \in 2^{X_a} : |X| = m\right\} = \mathbf{P}\left\{w \in \Omega : \sum_{x \in X_a} \mathbf{1}_x(\omega) = m\right\}.$$

В принятых обозначениях

$$2^{X_a} = \sum_{m=0}^{a} C_{X_a}^m = \sum_{m \geq 0} C_{X_a}^m$$

— это объединение непересекающихся m-слоев подмножеств и

$$\Omega = \sum_{m=0}^{a} C_{X_a}^m = \sum_{m \geq 0} C_{X_a}^m$$

— это объединение соответствующих непересекающихся m-слоев элементарных событий. Кроме того, заметим, что

$$\bigcup_{x \in X_a} x = \sum_{m \geq 1} C_{X_a}^m = \left(C_{X_a}^0\right)^c = \Omega \setminus C_{X_a}^0$$

— объединение множества событий X_a отличается от всего Ω только отсутствием 0-слоя. Введем еще сокращенное обозначение

$$C_{X_a}^{\geq m} = \sum_{i \geq m} C_{X_a}^i$$

для так называемых *срезов множества случайных событий* X_a *на уровне* m, так что

$$\bigcup_{x \in X_a} x = C_{X_a}^{\geq 1}$$

— "привычное" объединение множества случайных событий X_a — это не что иное, как срез этого множества событий на уровне 1. Заметим, что

$$\bigcap_{x \in X_a} x = C_{X_a}^a$$

— "привычное" пересечение множества случайных событий X_a — это не что иное, как a-слой этого a-множества событий, а

$$\bigcap_{x \in X_a} x^c = C_{X_a}^0$$

— "привычное" пересечение дополнений случайных событий из множества X_a — это не что иное, как 0-слой этого множества событий.

На рис. 1 с использованием введенных обозначений изображена слойная структура пространства элементарных событий Ω (квадрат), порождаемая симметричными p-событиями. Слои событий $C_{X_a}^i$, $0 < i < a$ изображены в виде соответствующих колец. В центре расположен a-слой $C_{X_a}^a$, т.е. пересечение всех событий из X_a, на периферии — 0-слой $C_{X_a}^0$, т.е. пересечение дополнений всех событий из X_a.

Что касается этого изображения слойной структуры, то к нему надо относиться как к безнадежной попытке изобразить в "привычных" для трехмерного разума образах то, как может выглядеть такая структура. "На самом деле", слойная структура симметричных случайных событий должна скорее иметь своего рода фрактальный вид, когда в каждой "малой" области Ω "одновременно" присутствуют все возможные пересечения симметричных событий, а само по себе каждое симметричное событие "одинаково распылено" по всему Ω таким образом, чтобы иметь возможность "одинаково пересекаться" с другими такими же "одинаковым образом распыленными" симметричными событиями.

Ситуация немного напоминает то, что "творится" в квантовой физике, когда при наблюдении за квантовыми микрочастицами используются макроприборы и наблюдатели вынуждены волей–неволей описывать квантовые свойства этих микрочастиц в терминах классических переменных обычной механики. К этой ситуации прямое отношение имеет принцип неопределенности Гейзенберга, запрещающий использовать классические переменные (координату, импульс и т.п.) для описания состояния квантовых объектов, поскольку те находятся в *суперпозиционных* состояниях, не поддающихся описанию привычными переменными.

Так же, как квантовые микрочастицы вынужденно измеряются макроприборами, структуры симметричных событий вынужденно изображаются в виде привычных кругов и колец.

Аналогия усилится еще больше, если сопоставить симметричные случайные события, "одинаково распыленные" по всему Ω, с квантовыми микрочастицами, *суперпозиционное* состояние которых также "позволяет" им "находиться одновременно" в каждой точке пространства с заданной вероятностью, иными словами, быть "распыленными" по всему пространству в соответствии со своим распределением вероятностей.

Вместе с тем надо заметить, что "распыленность" "распыленности" — рознь. "Распыленность" квантовых микрочастиц всегда связывается нами с протяженностью пространства (возможно, ошибочно под воздействием нашего существования в виде макротел). "Расспыленность" же симметричных случайных событий не связана ни с какой протяженностью пространства Ω, так как это пространство совершенно абстрактно, на нем нет метрической структуры, и любая протяженность в этом пространстве не имеет смысла. Однако образ "распыленности" симметричных событий не возник сам по себе, он навеян свойствами этих событий к пересечению. Именно свойство одинаковой "пересеченности" равномощных подмножеств симметричных событий порождает образ их "распыленности" по всему Ω и, по сути дела, своеобразно определяет в Ω понятие некой "протяженности". Хотя возможно, что представление о "протяженности" — это "атавизм" нашего "горького" физического опыта, и вовсе не обязательно привлекать это понятие при визуализации того, что происходит в пространстве симметричных событий. Ведь можно было ограничиться фразой: там происходит то же, что и в пространстве квантовых микрочастиц (если таковое пространство можно представить), — иными словами, вытеснить классический "физический" опыт "квантовым".

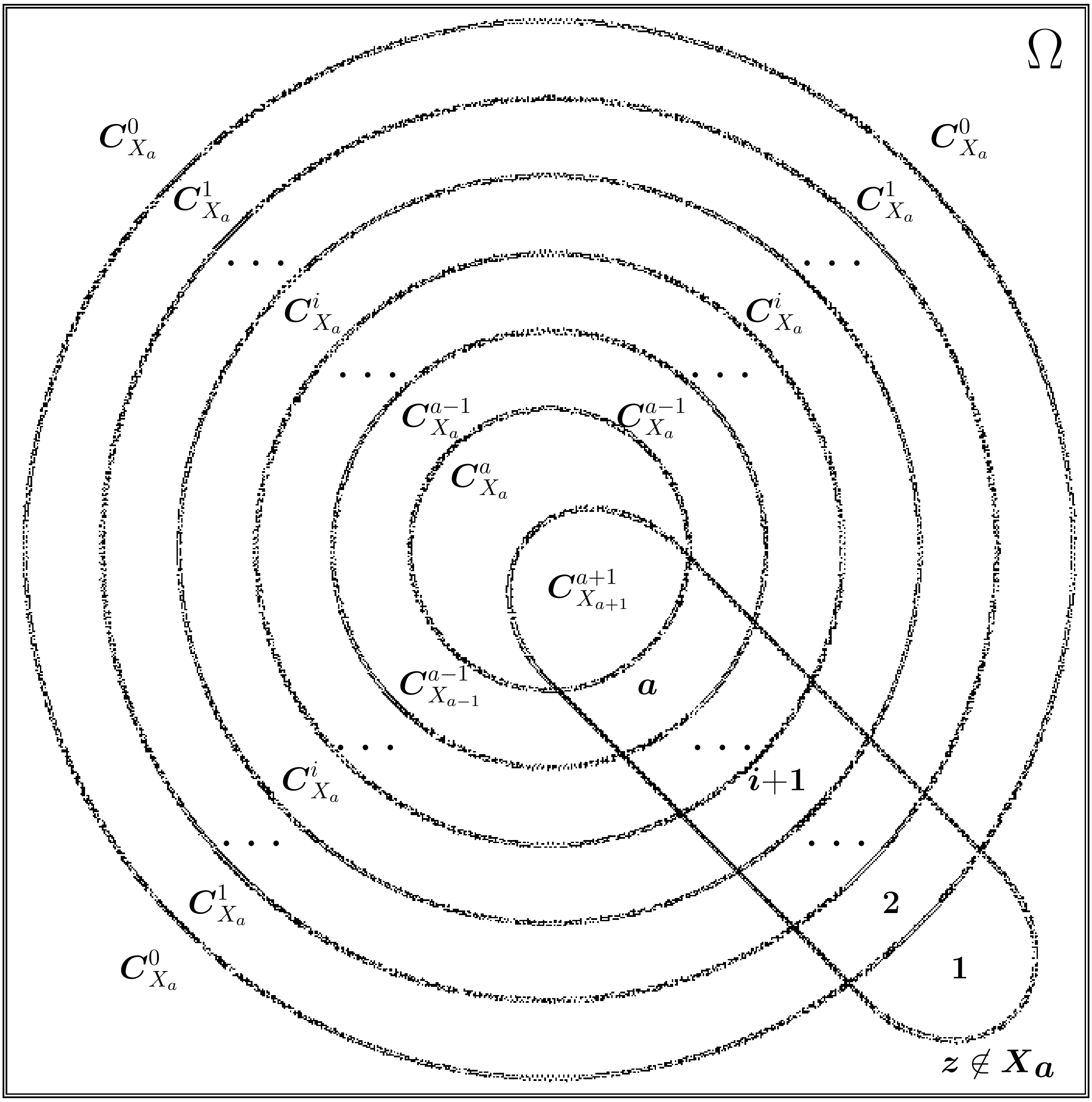

Рис. 1: Слойная структура пространства элементарных событий Ω (квадрат), порождаемая симметричными p-событиями. Слои событий изображены в виде соответствующих колец. Схематично показано добавление к a-множеству X_a симметричных p-событий очередного p-события $z \notin X_a$ (овал) и образование $(a+1)$-множества $X_{a+1} = X_a \cup \{z\}$. Событие $z \cap C^0_{X_a}$ (нижняя часть овала, помеченная единицей) наступает с вероятностью $p_{a+1}(1)$ всякий раз, когда наступает лишь одно событие z и не наступает ни одного события из X_a.

2.7.1 Особенности слойной структуры пространства симметричных событий

Рассмотрим некоторые особенности слойной структуры пространства элементарных событий, порождаемой случайным множеством симметричных

p-событий K_A под $\mathfrak{X}_A$. Как известно, эта слойная структура определяется любым из мощностных распределений: $u_{(a)}, p_{(a)}, p_A(a)$ или $\pi_A(a)$. Рассмотрим примеры пяти распределений мощности случайного множества K_A под $\mathfrak{X}_A$ при $A = 7$, которым соответствуют различные слойные структуры, отличающиеся друг от друга характерными особенностями.

Пример 1 (симметричные события, независимые в совокупности). Рассмотрим случайное множество симметричных p-событий, независимых в совокупности $\mathfrak{X}_7$ для $p = 1/2$. Распределение мощности имеет биномиальный вид: $\pi_A(a) = C_A^a p^a (1-p)^{A-a}$, мощностные вероятности объединения равны: $u_{(a)} = 1 - (1-p)^a$, мощностные вероятности пересечения равны: $p_{(a)} = p^a$, где $a = 0, \ldots, A$.

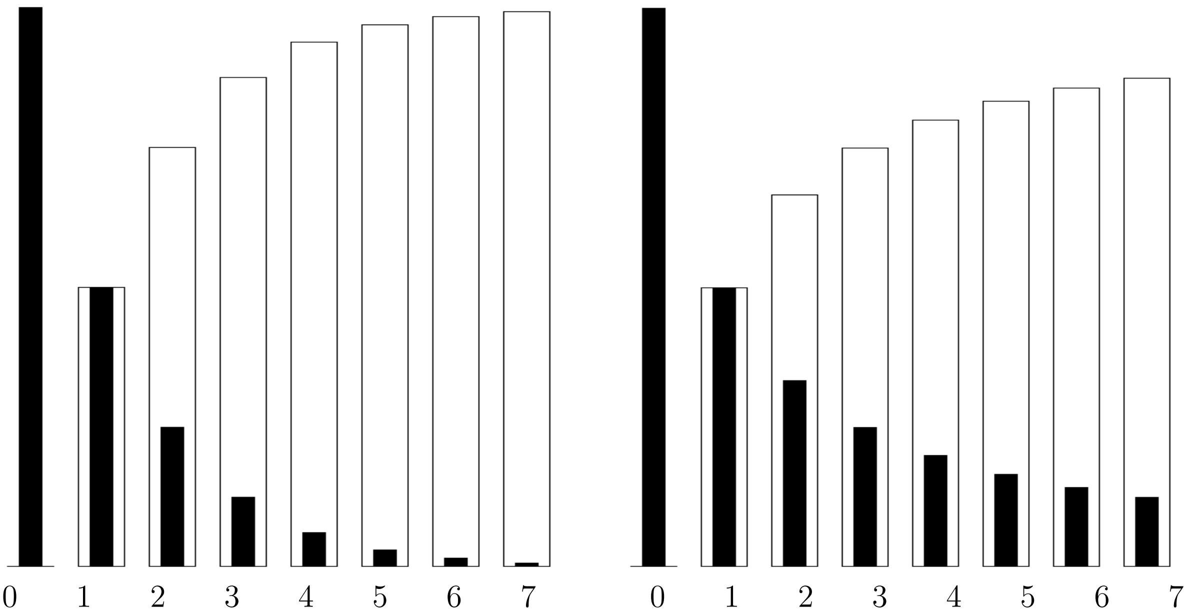

Рис. 2: Мощностные вероятности объединений (белые прямоугольники) и пересечений (темные прямоугольники) симметричных событий, как функции мощности $a = 0, \ldots, 7$. Пример 1 (слева): биномиальное распределение мощности. Пример 2 (справа): равновероятное распределение мощности.

Пример 2 (симметричные события с равновероятным распределением мощности). Рассмотрим случайное множество симметричных p-событий, которое имеет равновероятное распределение мощности: $\pi_A(a) = 1/(A+1)$. Для этого распределения $p = 1/2$. Мощностные вероятности объединения равны: $u_{(a)} = 1 - 1/(a+1)$. Мощностные вероятности пересечения равны: $p_{(a)} = 1/(a+1)$, где $a = 0, \ldots, A$.

Пример 3 (симметричные события с нестрого возрастающими мощностными вероятностями объединений). Рассмотрим случайное множество симметрич-

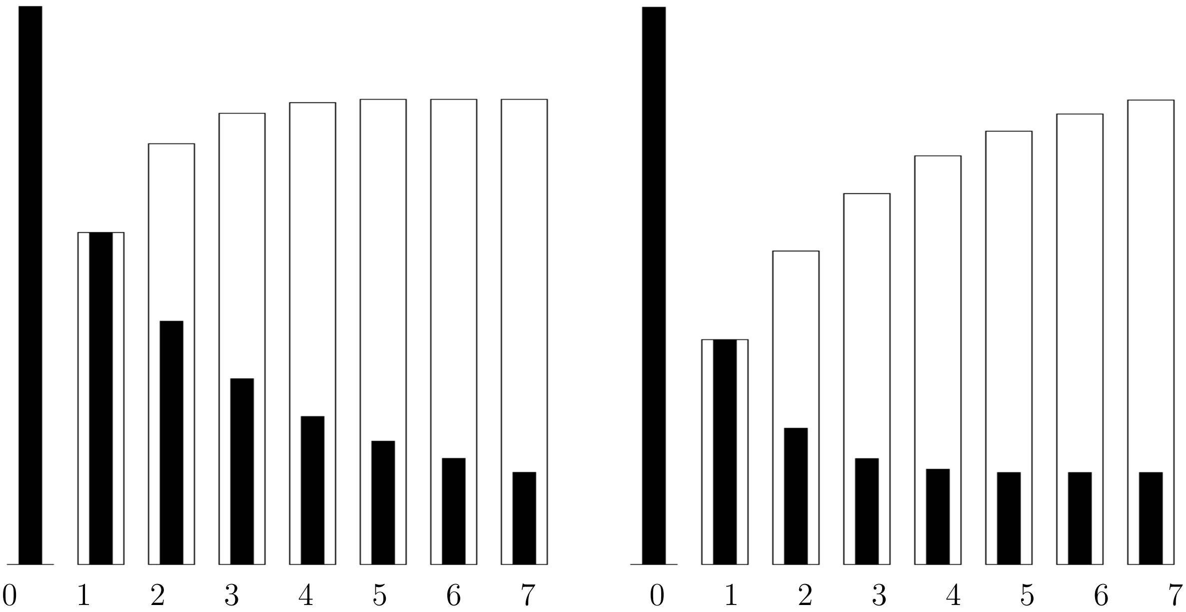

Рис. 3: Мощностные вероятности объединений (белые прямоугольники) и пересечений (темные прямоугольники) симметричных событий, как функции мощности $a = 0, \ldots, 7$. Пример 3 (слева): нестрого возрастающие мощностные вероятности объединений. Пример 4 (справа): нестрого убывающие вероятности пересечений.

ных p-событий, которое имеет распределение мощности вида:

$$\pi_A(a) = \begin{cases} 0, & a = 1, 2 \\ \\ 1/(A-1), & \text{иначе.} \end{cases}$$

Для этого распределения $p = 25/42$. Мощностные вероятности объединений нестрого возрастают: $u_{(5)} = u_{(6)} = u_{(7)} = 5/6$. Мощностные вероятности пересечений строго убывают.

Пример 4 (симметричные события с нестрого убывающими мощностными вероятностями пересечений). Рассмотрим случайное множество симметричных p-событий, которое имеет распределение мощности вида:

$$\pi_A(a) = \begin{cases} 0, & a = A-1, A-2 \\ \\ 1/(A-1), & \text{иначе.} \end{cases}$$

Для такого распределения $p = 17/42$. Мощностные вероятности объединений строго возрастают. Мощностные вероятности пересечений нестрого убывают: $p_{(5)} = p_{(6)} = p_{(7)} = 1/6$.

Пример 5 (симметричные события с нестрого монотонными мощностными вероятностями объединений и пересечений). Рассмотрим случайное множе-

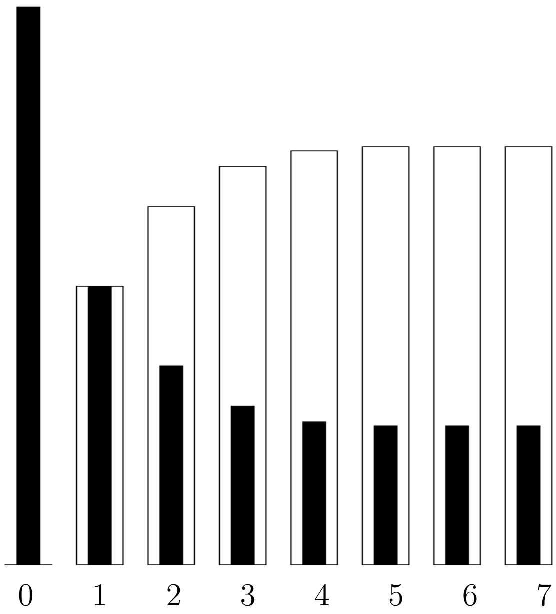

Рис. 4: Мощностные вероятности объединений и пересечений симметричных событий, как функции мощности $a = 0, \ldots, A$. Пример 5: Нестрого монотонные мощностные вероятности объединений и пересечений.

ство симметричных p-событий, которое имеет распределение мощности вида:

$$\pi_A(a) = \begin{cases} 0, & a = 1, 2, A-1, A-2 \\ \\ 1/(A-3), & \text{иначе.} \end{cases}$$

Для такого распределения $p = 1/2$. Мощностные вероятности объединений и пересечений нестрого монотонны: $u_{(5)} = u_{(6)} = u_{(7)} = 3/4$, $p_{(5)} = p_{(6)} = p_{(7)} = 1/4$.

2.7.2 Карта симметричных распределений случайных событий

Предварительный анализ рассмотренных примеров показывает, что строгая и нестрогая монотонность мощностных вероятностей объединений и пересечений симметричных событий, как функций мощности, может встречаться во всех четырех мыслимых сочетаниях. Следовательно, относительно данных свойств мощностные вероятности объединений и пересечений симметричных событий "ведут себя вполне самостоятельно". Как будет доказано позже, справедлива

Лемма (о строгой монотонности мощностных вероятностей объединений и пересечений симметричных событий). *Во-первых, мощностные вероятности объединений симметричных событий, определенных под $\mathfrak{X}_A$, строго моно-*

тонны как функции мощности, всякий раз, когда $\pi_A(1) > 0$:

$$u_{(0)} < u_{(1)} < \ldots < u_{(A-1)} < u_{(A)} \quad \Longleftrightarrow \quad \pi_A(1) > 0.$$

Во-вторых, мощностные вероятности пересечений симметричных событий, определенных под $\mathfrak{X}_A$*, строго монотонны как функции мощности, всякий раз, когда* $\pi_A(A-1) > 0$:

$$p_{(0)} > p_{(1)} > \ldots > p_{(A-1)} > p_{(A)} \quad \Longleftrightarrow \quad \pi_A(A-1) > 0.$$

Данная лемма позволяет представить все множество симметричных распределений разбитым на четыре класса в зависимости от того, строго или нестрого монотонны мощностные вероятности объединений и пересечений симметричных событий. Чтобы было удобно работать с этими классами, им требуются собственные имена.

Определение (симметрично объединенные и симметрично пересеченные события). Во-первых, симметричные события будем называть *симметрично объединенными* всякий раз, когда мощностные вероятности объединений строго монотонны, как функции мощности. Во-вторых, симметричные события будем называть *симметрично пересеченными* всякий раз, когда мощностные вероятности пересечений строго монотонны, как функции мощности.

Определение (строго и слабо симметричные события). Во-первых, симметричные события будем называть *строго симметричными* всякий раз, когда они симметрично объединенные и симметрично пересеченные. Во-вторых, симметричные события будем называть *слабо симметричными* всякий раз, когда они не являются ни симметрично объединенными, ни симметрично пересеченными.

В качестве визуализации данных определений симметричных случайных событий изобразим карту их распределений. Еще раз напомним, что множество симметричных распределений — это не что иное, как множество слойно-равновероятных распределений. Поначалу может показаться странным, что условия, определяющие четыре подмножества симметричных распределений, слишком просты и касаются всего двух вероятностей $\pi_A(1)$ и $\pi_A(A-1)$ из распределения мощности случайного множества K_A:

$$\pi_A(0), \pi_A(1), \ldots, \pi_A(A-1), \pi_A(A),$$

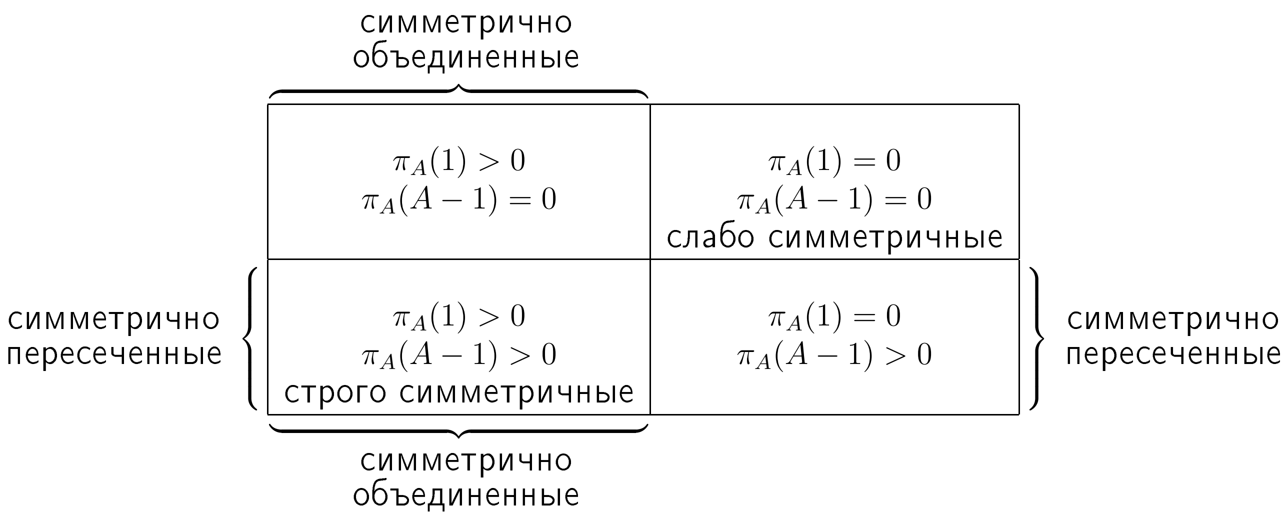

Рис. 5: Карта симметричных распределений случайных событий под $\mathfrak{X}_A$. Весь прямоугольник соответствует множеству всех симметричных распределений, которое разбивается на четыре подмножества двумя классами: *симметрично объединенных* (левая половина прямоугольника) и *симметрично пересеченных* (нижняя половина прямоугольника) распределений. Пересечение этих двух классов образует множество *строго симметричных* распределений, а пересечение их дополнений — множество *слабо симметричных* распределений. Для каждого из четырех подмножеств распределений указано условие на распределение мощности, определяющее соответствующий класс.

которые занимают в этом распределении вторые от каждого края позиции. Однако, несмотря на свои вторые позиции, именно эти две вероятности играют главные роли и определяют соответственно *вогнутость и выпуклость* вероятностей объединений $u_{(a)}$ и вероятностей пересечений $p_{(a)}$ как функций аргумента a. Справедлива

Лемма (о вогнутости мощностных вероятностей объединений и выпуклости мощностных вероятностей пересечений строго симметричных событий). *Симметричные события строго симметричны всякий раз, когда выполнено любое из двух условий:*

- *мощностные вероятности объединений вогнуты,*
- *мощностные вероятности пересечений выпуклы,*

как функции мощности.

2.8 Одна причина распространенности одного заблуждения и иллюстрация "парадоксальных" свойств симметричных событий на простых примерах

2.8.1 Заблуждение о "независимости несовместных случайных событий"

Не только среди начинающих изучать теорию вероятностей довольно распространено заблуждение, что якобы "несовместные случайные события независимы". Что, разумеется не верно. Верно как раз противоположное: *любые несовместные случайные события зависят друг от друга наиболее сильным образом.*

В самом деле, если два события x и y, вероятность каждого из которых строго больше нуля: $\mathbf{P}(x) > 0$, $\mathbf{P}(y) > 0$, несовместны, т.е. $x \cap y = \emptyset$ — события имеют пустое пересечение, то вероятность их пересечения равна нулю:

$$\mathbf{P}(x \cap y) = \mathbf{P}(\emptyset) = 0,$$

потому, что пересечение пусто, и в силу определения вероятности. Таким образом,

$$\mathbf{P}(x \cap y) = 0 < \mathbf{P}(x)\mathbf{P}(y)$$

— определяющее независимость равенства вероятностей нарушено, и нарушено самым сильным образом. Такие события называют иногда "статистически отталкивающимися", поскольку они никогда на наступают вместе. Так что несовместные случайные события являют собой типичный пример максимально возможной "отрицательной" статистической зависимости между событиями.

2.8.2 Причина устойчивости заблуждения

Можно назвать несколько причин данного заблуждения. Однако меня будет интересовать только одно: почему это заблуждение столь *устойчиво* среди людей сравнительно далеких от теории вероятностей. Поэтому такие очевидные причины, как элементарное непонимание простейших определений, мне не интересны. Мне интересен не сам факт непонимания, и не причины этого факта, мне интересна *причина его устойчивости.*

Мне кажется, что эта причина кроется в навязчивом опыте наблюдений за окружающими системами материальных частиц. В этом опыте, полностью поглотившем нас, системы, *не имеющие ничего общего*, обычно считаются независимыми. Некритический перенос этого "физического" опыта на системы случайных событий неизбежно приводит к рассматриваемому заблуждению, когда случайные события, *не имеющие ничего общего (несовместные)*, также продолжают считаться статистически независимыми в силу укоренившейся "физической" привычки.

2.8.3 Два "парадокса" симметричных событий

Неожиданные выводы и утверждения какой-либо теории, противоречащие "здравому смыслу", обычно называют парадоксами. Разрешение и объяснение парадоксов неизбежно ведет к развитию и самой теории, и ее приложений.

Нельзя отрицать, что наше восприятие научных выводов во многом зависит от контекста, в котором они нам встречаются. Один и тот же факт в одном контексте выглядит только как некое верное утверждение и его присутствие там выглядит вполне "будничо". В другом контексте тот же факт, выраженный подходящим языком, может восприниматься как парадокс.

Некоторым важным эвентологическим утверждениям, сформулированным и доказанным в этой лекции вполне "будничо", также можно придать парадоксальную форму, чтобы выделить их на фоне рядовых утверждений и способствовать более глубокому пониманию эвентологии.

Первый парадокс. Объединения

$$X_{(a)} = \bigcup_{x \in X_a} x, \quad X_{(b)} = \bigcup_{x \in X_b} x$$

непересекающихся подмножеств X_a и X_b симметричных случайных событий всегда пересекаются. Иначе говоря,

$$X_a \cap X_b = \emptyset \quad \Longrightarrow \quad X_{(a)} \cap X_{(b)} \neq \emptyset.$$

Второй парадокс. Для симметричных случайных событий, независимых в совокупности $\mathfrak{X}_A$, справедливо:

$$X_a \cap X_b = \emptyset \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{P}(X_{(a)} \cap X_{(b)}) = \mathbf{P}(X_{(a)})\mathbf{P}(X_{(b)})$$

— объединения подмножеств симметричных событий независимы, если эти подмножества не пересекаются.

2.8.4 Эвентологическое оправдание заблуждения

Формулировка второго парадокса симметричных событий удивительным образом созвучна с заблуждением о "независимости несовместных случайных событий", о котором шла речь выше.

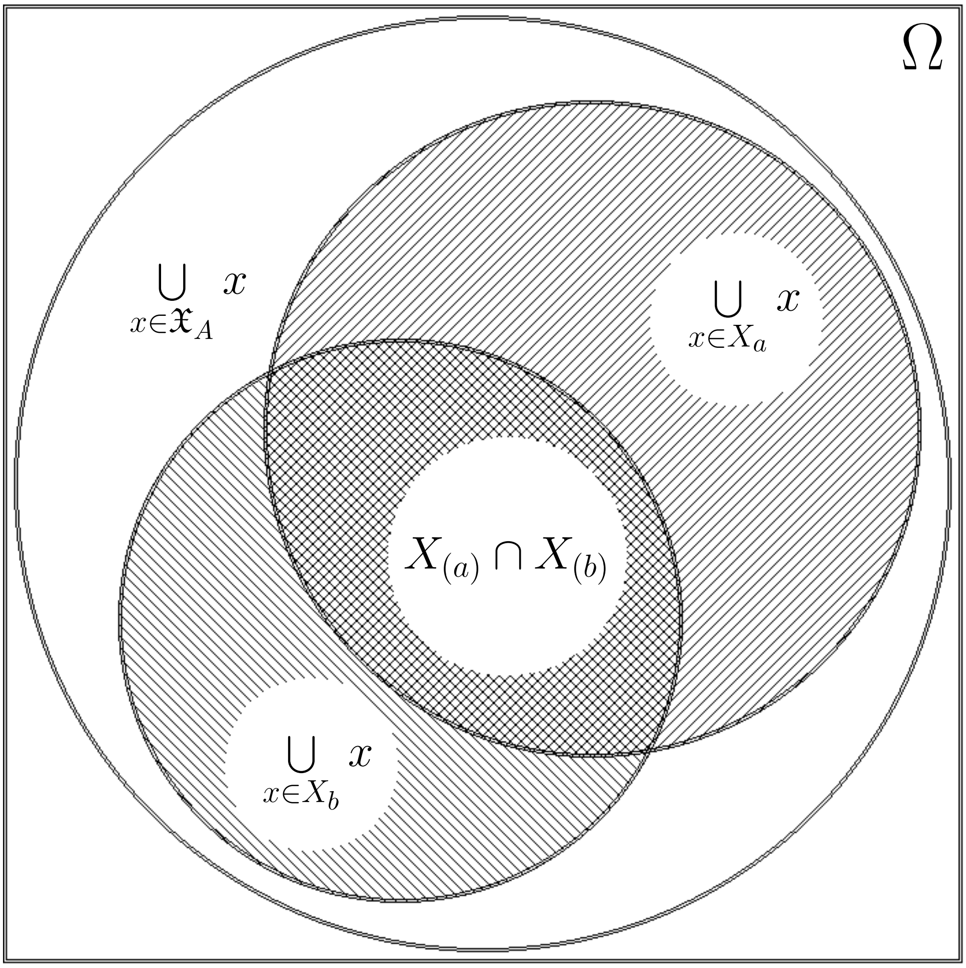

Рис. 6: Иллюстрация двух "парадоксов" объединений симметричных событий. Первый "парадокс": "Объединения $X_{(a)} = \bigcup_{x \in X_a} x$ и $X_{(b)} = \bigcup_{x \in X_b} x$ непересекающихся подмножеств X_a и X_b симметричных событий ($X_a \cap X_b = \emptyset$) всегда пересекаются: $X_{(a)} \cap X_{(b)} \neq \emptyset$". Для симметричных событий, независимых в совокупности, справедливо второе "парадоксальное" утверждение: "Если подмножества симметричных событий X_a и X_b не пересекаются: $X_a \cap X_b = \emptyset$, то объединения таких подмножеств симметричных событий $X_{(a)}$ и $X_{(b)}$ независимы".

По-видимому, теперь можно утверждать, что в рамках теории симметричных случайных событий удалось найти удовлетворительное эвентологическое оправдание этого заблуждения, подкрепляющее наши предположения, положенные в основу теории. Речь идет о предположении, что все *наблюдаемые* случайные события можно представить в виде *объединения симмет-*

ричных случайных событий. В то же время случайные события, которые непредставимы в этом виде, недоступны наблюдениям — *ненаблюдаемы.*

Если наше предположение выполнено, то становится ясной природа заблуждения о "независимости несовместных случайных событий", которое объясняется тем, что ошибочно за эвентологический аналог системы материальных частиц принимается произвольное классическое случайное событие, в то время как в эвентологии таким аналогом предлагается считать не любое, а только наблюдаемое случайное событие — *объединение симметричных событий.* Все дело в том, что такие объединения независимы, если составлены из *различных* симметричных событий, т.е. "не имеют ничего общего в своих составах" — являются объединениями непересекающихся подмножеств симметричных событий. Это и есть, как мне кажется, эвентологическое оправдание устойчивости заблуждения в том, что "несовместные случайные события независимы".

2.9 Сопряженные случайные множества событий

Для любого случайного множества K_A событий, *наступивших* под $\mathfrak{X}_A$, под тем же $\mathfrak{X}_A$ определено его дополнение $K_A^c = \mathfrak{X}_A \setminus K_A$ — случайное множество событий, *ненаступивших* под $\mathfrak{X}_A$:

$$K_A^c : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}) \to \left(2^{\mathfrak{X}_A}, 2^{2^{\mathfrak{X}_A}}\right).$$

Распределение дополнения K_A^c определяется распределением самого случайного множества K_A очевидными соотношениями:

$$\mathbf{P}(K_A^c = X) = \mathbf{P}(K_A = X^c), \quad X \subseteq \mathfrak{X}_A.$$

Дополнение K_A^c, как и K_A, определено под $\mathfrak{X}_A$. Поэтому его элементами могут быть только события $x \in \mathfrak{X}_A$.

Вместе с тем можно представить себе случайные множества, состоящие из событий $x^c = \Omega \setminus x$, дополнительных к $x \in \mathfrak{X}_A$. Чтобы определить такие случайные множества дополнений, сначала надо определить множество их возможных значений. Поставим в соответствие множеству событий $\mathfrak{X}_A$ его *дополнение по Минковскому,*

$$\mathfrak{X}_A^{(c)} = \{x^c : \; x \in \mathfrak{X}_A\}$$

— множество дополнений событий из $\mathfrak{X}_A$. Заметим, что если среди событий из $\mathfrak{X}_A$ не найдется ни одной пары событий, дополнительных друг другу[2], то

$$\mathfrak{X}_A \cap \mathfrak{X}_A^{(c)} = \emptyset$$

— множество $\mathfrak{X}_A$ не пересекается со своим дополнением по Минковскому. Будем также называть дополнение по Минковскому $\mathfrak{X}^{(c)}$ множеством, *сопряженным* $\mathfrak{X}_A$, и для краткости использовать для него традиционное обозначение для сопряженных математических объектов:

$$\mathfrak{X}_A^* = \mathfrak{X}_A^{(c)}.$$

	наступившие		ненаступившие	
события: x	K_A	под $\mathfrak{X}_A$	$K_A^c = \mathfrak{X}_A \setminus K_A$	под $\mathfrak{X}_A$
дополнения событий: x^c	$K_A^{(c)}$	под $\mathfrak{X}_A^{(c)}$	$\left(K_A^{(c)}\right)^c = \mathfrak{X}_A^{(c)} \setminus K_A^{(c)}$	под $\mathfrak{X}_A^{(c)}$

Рис. 7: Случайные множества событий K_A под $\mathfrak{X}_A$, сопряженные случайные множества событий $K_A^{(c)}$ под $\mathfrak{X}_A^{(c)} = \{x^c : \ x \in \mathfrak{X}_A\}$ и их дополнения: K_A^c и $\left(K_A^{(c)}\right)^c$.

Заметим еще, что

$$X^* \subseteq \mathfrak{X}_A^* \quad \Longleftrightarrow \quad X \subseteq \mathfrak{X}_A,$$

где $X^* = \{x^c : \ x \in X\}$ — множество событий, сопряженное X.

Определим случайное множество дополнений событий, *наступивших* под $\mathfrak{X}_A^*$, как измеримое отображение

$$K_A^* : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}) \to \left(2^{\mathfrak{X}_A^*}, 2^{2^{\mathfrak{X}_A^*}}\right)$$

и назовем его — *случайным множеством, сопряженным* K_A. Распределение *сопряженного случайного множества* K_A^* связано с распределением K_A соотношениями

$$\mathbf{P}(K_A^* = X^*) = \mathbf{P}(K_A = X), \quad X^* \subseteq \mathfrak{X}_A^*.$$

[2]Это выполнено, например, когда все вероятности событий из $\mathfrak{X}_A$ строго меньше 1/2. В частности, это выполнено для множества $\mathfrak{X}_A$ симметричных p-событий при $p < 1/2$.

Для любого сопряженного случайного множества K^*_A дополнений событий, *наступивших* под $\mathfrak{X}^*_A$, под тем же $\mathfrak{X}^*_A$ определено его дополнение $(K^*_A)^c = \mathfrak{X}^*_A \setminus K^*_A$ — случайное множество дополнений событий, *ненаступивших* под $\mathfrak{X}^*_A$:

$$(K^*_A)^c : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}) \to \left(2^{\mathfrak{X}^*_A}, 2^{2^{\mathfrak{X}^*_A}}\right).$$

Распределение дополнения $(K^*_A)^c$ определяется распределением самого сопряженного случайного множества K^*_A очевидными соотношениями:

$$\mathbf{P}((K^*_A)^c = X^*) = \mathbf{P}(K^*_A = (X^*)^c), \quad X^* \subseteq \mathfrak{X}^*_A.$$

Дополнение $(K^*_A)^c$, как и K^*_A, определено под $\mathfrak{X}^*_A$. Поэтому его элементами могут быть только дополнения событий $x^c \in \mathfrak{X}^*_A$.

Поскольку операции дополнения и сопряжения коммутативны:

$$(X^*)^c = (X^c)^*,$$

то

$$\mathbf{P}((K^*_A)^c = X^*) = \mathbf{P}(K^c_A = X), \quad X \subseteq \mathfrak{X}_A$$

— дополнение к любому сопряженному подмножеству событий совпадает с сопряженным дополнением этого подмножества.

3 Симметричные случайные события и их смеси

3.1 Независимые множества случайных событий

Обычно определяется независимость алгебр событий, потому что такое определение, существенно опирающееся на замкнутость алгебраической структуры относительно теоретико-множественных операций, внешне выглядит проще.

Определение (независимость алгебр событий). Две подалгебры событий $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}$ и $\mathcal{F}_2 \subseteq \mathcal{F}$ называются *независимыми (относительно вероятности* $\mathbf{P}$*)*, если независимы любые два события x_1 и x_2, принадлежащие соответственно $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$:

$$\mathbf{P}(x_1 \cap x_2) = \mathbf{P}(x_1)\mathbf{P}(x_2).$$

Нам же потребуется более общее определение независимости произвольных множеств событий, которые не обязательно являются алгебрами. Поскольку в таком определении не предполагается замкнутость рассматриваемых множеств событий относительно теоретико-множественных операций, определение выглядит сложнее.

Определение (независимость двух множеств событий). Два непересекающихся множества случайных событий $X, Y \subseteq \mathfrak{X}_A \subseteq \mathcal{F}$ называются *независимыми (относительно вероятности* $\mathbf{P}$*)* всякий раз, когда пересечения

$$X^{(a)} = \bigcap_{x \in X_a} x, \quad Y^{(b)} = \bigcap_{y \in Y_b} y$$

любых подмножеств $X_a \subseteq X$ и $Y_b \subseteq Y$ этих множеств событий независимы:

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{x \in X_a + Y_b} x\right) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{x \in X_a} x\right)\mathbf{P}\left(\bigcap_{y \in Y_b} y\right).$$

Лемма (о независимых множествах случайных событий). *Два непересекающихся множества случайных событий* $X, Y \subseteq \mathfrak{X}_A \subseteq \mathcal{F}$ независимы (относительно вероятности $\mathbf{P}$) *всякий раз, когда объединения*

$$X_{(a)} = \bigcup_{x \in X_a} x, \quad Y_{(b)} = \bigcup_{y \in Y_b} y$$

любых подмножеств $X_a \subseteq X$ *и* $Y_b \subseteq Y$ *этих множеств событий независимы:*

$$\mathbf{P}\left(\left(\bigcup_{x \in X_a} x\right) \cap \left(\bigcup_{y \in Y_b} y\right)\right) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{x \in X_a} x\right)\mathbf{P}\left(\bigcup_{y \in Y_b} y\right).$$

3.2 Смеси симметричных случайных событий

Допустим, что под множеством событий $\mathfrak{X}_A$, которое разбито на два подмножества

$$\mathfrak{X}_A = \mathcal{Y}_N + \mathcal{Z}_M,$$

определено случайное множество случайных событий K_A, две проекции которого на подмножество $\mathcal{Y}_N$:

$$K_N = K_A \cap \mathcal{Y}_N,$$

и на подмножество $\mathcal{Z}_M$:

$$K_M = K_A \cap \mathcal{Z}_M,$$

— это независимые случайные множества симметричных событий с соответствующими мощностными распределениями вероятностей объединений:

$$u'_{(0)}, \ldots, u'_{(m)}, \ldots, u'_{(M)}, \quad u''_{(0)}, \ldots, u''_{(n)}, \ldots, u''_{(N)}.$$

Напомним,

Определение (независимые случайные множества событий). Случайные множества событий K_N и K_M, определенные под непересекающимися множествами событий $\mathcal{Y}_N$ и $\mathcal{Z}_M$ соответственно, называются *независимыми*, если для любого $X \subseteq \mathcal{Y}_N \cup \mathcal{Z}_M$ выполнено одно из следующих условий:

$$\mathbf{P}(K_N + K_M = X) = \mathbf{P}(K_N = X \cap \mathcal{Y}_N)\mathbf{P}(K_M = X \cap \mathcal{Z}_M),$$

$$\mathbf{P}(K_N + K_M \subseteq X) = \mathbf{P}(K_N \subseteq X \cap \mathcal{Y}_N)\mathbf{P}(K_M \subseteq X \cap \mathcal{Z}_M),$$

$$\mathbf{P}(X \subseteq K_N + K_M) = \mathbf{P}(X \cap \mathcal{Y}_N \subseteq K_N)\mathbf{P}(X \cap \mathcal{Z}_M \subseteq K_M).$$

Во-первых, поскольку обе проекции K_N и K_M случайного множества K_A определены под непересекающимися множествами событий $\mathcal{Y}_N$ и $\mathcal{Z}_M$, которые образуют разбиение множества событий $\mathfrak{X}_A$, то

$$K_A = K_N + K_M.$$

Во-вторых, в силу того что проекции независимы, распределение случайного множества событий K_A определяется их мощностными распределениями $u'_{(m)}$ и $u''_{(n)}$. Иначе говоря,

$$1 - u_{(m,n)} = \left(1 - u'_{(m)}\right)\left(1 - u''_{(n)}\right) \qquad (i)$$

для $m = 0, \ldots, M,\ n = 0, \ldots, N$, где

$$u_{(m,n)} = \mathbf{P}\left(\bigcup_{z \in Z_m} z \bigcup_{y \in Y_n} y\right) = \mathbf{P}(K_A \not\subseteq (Z_m + Y_n)^c)$$

— мощностные вероятности объединений, определяющие распределение K_A.

Первое предположение. Предположим теперь, что проекция K_N — это случайное множество событий, независимых в совокупности $\mathcal{Y}_N$. В этом случае мощность этой проекции имеет биномиальное распределение, а мощностные вероятности объединений имеют вид:

$$u''_{(n)} = \dot{u}_{(n)} = 1 - (1-p)^n, \quad n = 0, \ldots, N.$$

При такой проекции мощностное распределение случайного множества K_A выглядит следующим образом:

$$1 - u_{(m,n)} = (1-p)^n\left(1 - u'_{(m)}\right) \qquad (ii)$$

для $m = 0, \ldots, M,\ n = 0, \ldots, N$.

Второе предположение. Предположим еще, что проекция K_M — это случайное множество непересекающихся симметричных случайных событий. Тогда мощностные вероятности объединений для этой проекции имеют вид:

$$u'_{(m)} = mp, \quad m = 0, \ldots, M.$$

При такой проекции мощностное распределение случайного множества K_A выглядит совсем просто:

$$1 - u_{(m,n)} = (1-p)^n(1-mp) \qquad (iii)$$

для $m = 0, \ldots, M,\ n = 0, \ldots, N$.

Без особого труда можно определить более общие так называемые "l-арные" ($l \geq 2$) симметричные случайные множества событий $\mathfrak{X}_{L_1,\ldots,L_l}$, которые являются независимым объединением своих l проекций под l-фрагментным множеством событий $\mathfrak{X}_{L_1,\ldots,L_l} = \mathfrak{X}_{L_1} + \ldots + \mathfrak{X}_{L_l}$. Однако для целей построения эвентологических моделей ядра пока используются не более, чем *бинарные* строго симметричные случайные множества событий $K_{M,N}$ под $\mathfrak{X}_{M,N}$.

4 Изоморфизм симметричных случайных множеств событий

Изоморфизм — одно из основных понятий современной математики, возникшее сначала в алгебре, но оказавшееся весьма существенным для общего понимания строения и области возможных применений каждого раздела математики. Понятие изоморфизма возникло в теории групп, где впервые был понят тот факт, что изучение внутренней структуры двух изоморфных множеств элементов представляет собой одну и ту же задачу. Существование этого факта подметил Р.Декарт, он предвидел возможность "отождествлять" изоморфные отношения или операции и называл их "подобными". Термин "изоморфизм" был введен в середине XIX века. Современная терминология утвердилась после работ Э.Нётер.

4.1 Теоретико-множественные операции над случайными множествами симметричных событий

Теорема (об инвариантности симметричности случайных событий относительно теоретико-множественных операций). *Если*

$$K_A^{(1)}, \ldots, K_A^{(n)}$$

— независимые в совокупности случайные множества симметричных событий, определенные под $\mathfrak{X}_A$, то любая теоретико-множественная операция над ними порождает под $\mathfrak{X}_A$ случайное множество с симметричным распределением.

Доказательство. Достаточно показать, что симметричным распределением обладают дополнение $(K_A)^c$ и независимое пересечение $K'_A \cap K''_A$ (или — дополнение $(K_A)^c$ и независимое объединение $K'_A \cup K''_A$) случайных множеств симметричных событий, поскольку все остальные теоретико-множественные операции можно выразить через эти две базисные операции.

1) Симметричность распределения дополнения $(K_A)^c$ к случайному множеству симметричных событий K_A немедленно следует из определения и основных свойств симметричных событий (леммы 3 и 4).

2) Чтобы доказать симметричность распределения независимого пересечения $K_A^{\cap} = K'_A \cap K''_A$ двух симметричных случайных множеств событий K'_A и K''_A, в силу леммы 4' достаточно доказать, что распределение его вероятностей

$$p^{\cap}(X) = \mathbf{P}(K_A^{\cap} = X)$$

зависит только от мощности $|X|$, а не от самих подмножеств $X \subseteq \mathfrak{X}_A$:

$$p^{\cap}(X) = p^{\cap}(|X|), \quad X \subseteq \mathfrak{X}_A.$$

В самом деле,

$$p^{\cap}(X) = \mathbf{P}(K'_A \cap K''_A = X) = \sum_{X' \cap X'' = X} \mathbf{P}(K'_A = X', K''_A = X'') =$$
$$= \sum_{X' \cap X'' = X} \mathbf{P}(K'_A = X')\mathbf{P}(K''_A = X'') = \sum_{X' \cap X'' = X} p'_A(|X'|) p''_A(|X''|).$$

Для сокращения записи обозначим $a = |X|,\ a' = |X'| - a,\ a'' = |X''| - a$. Тогда

$$\sum_{X' \cap X'' = X} p'_A(|X'|) p''_A(|X''|) = \sum_{a' + a'' \leq A - a} C_{A-a}^{a'} C_{A-a-a'}^{a''} p'_A(a + a') p''_A(a + a''),$$

поскольку число пар подмножеств X' и X'', таких, что $X' \cap X'' = X$ и $a = |X|,\ a' = |X'| - a,\ a'' = |X''| - a$, равно $C_{A-a}^{a'} C_{A-a-a'}^{a''}$. Отсюда ясно, что сумма справа имеет одно и то же значение для любых подмножеств X одной и той же мощности $a = |X|$. Следовательно,

$$p^{\cap}(X) = p^{\cap}(|X|), \quad X \subseteq \mathfrak{X}_A.$$

Теорема доказана.

Определение (симметричные совокупности случайных множеств событий). Говорят, что совокупность случайных множеств событий, определенных под $\mathfrak{X}_A$, имеет совместное *симметричное* распределение всякий раз, когда пересечения равномощных подмножеств этой совокупности имеют одинаковые симметричные распределения под $\mathfrak{X}_A$.

Лемма. *Одинаково распределенные симметричные случайные множества независимы в совокупности всякий раз, когда совместное распределение этой совокупности случайных множеств симметрично.*

4.2 Изоморфизм между совокупностями симметричных случайных множеств событий и целочисленных случайных величин

Поскольку распределение симметричного случайного множества событий определяется распределением его мощности, и наоборот, то между совокупностями распределений симметричных случайных множеств под $\mathfrak{X}_A$ и распределений целочисленных случайных величин под $\{0, \dots, A\}$ существует тривиальный изоморфизм, устанавливающий взаимно однозначное соответствие

$$\varphi(a) = C^a_{\mathfrak{X}_A}, \quad \psi\left(C^a_{\mathfrak{X}_A}\right) = a$$

между совокупностью целых чисел и совокупностью слоев подмножеств множества $\mathfrak{X}_A$:

$$\{0, \dots, A\} \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{C^0_{\mathfrak{X}_A}, \dots, C^A_{\mathfrak{X}_A}\right\}.$$

Как и полагается при изоморфизме, каждой операции над симметричными случайными множествами событий под $\mathfrak{X}_A$ соответствует изоморфная ей операция над целочисленными случайными величинами под $\{0, \dots, A\}$. Рассмотрим примеры изоморфных операций.

4.2.1 Пересечение случайных множеств симметричных событий

Пусть K'_A и K''_A — два независимых между собой случайных множества симметричных событий под $\mathfrak{X}_A$ с индивидуальными распределениями мощности $\pi'_A(a) = C^a_A p'_A(a)$ и $\pi''_A(a) = C^a_A p''_A(a)$ соответственно. Распределение их независимого пересечения — случайного множества $K_A = K'_A \cap K''_A$, определенного также под $\mathfrak{X}_A$, определяется мощностными вероятностями

$$p^{\cap}_A(a) = \mathbf{P}(K'_A \cap K''_A = Y_a) = \sum_{X' \cap X'' = Y_a} \mathbf{P}(K'_A = X')\mathbf{P}(K''_A = X'') =$$

$$= \sum_{Y_a \subseteq X'} \mathbf{P}(K'_A = X') \sum_{X' \cap X'' = Y_a} \mathbf{P}(K''_A = X'').$$

В целях сокращения записи договоримся обозначать $a' = |X'|$, $a'' = |X''|$. Тогда

$$\sum_{Y_a \subseteq X'} \mathbf{P}(K'_A = X') \sum_{X' \cap X'' = Y_a} \mathbf{P}(K''_A = X'') = \sum_{Y_a \subseteq X'} p'_A(a') \sum_{X' \cap X'' = Y_a} p''_A(a'').$$

Заметим, что внутренняя сумма равна

$$\sum_{X' \cap X'' = Y_a} p''_A(a'') = \mathbf{P}(K''_A \cap X' = Y_a) = \mathbf{P}(K''_{X'} = Y_a) = \mathbf{P}(K''_{a'} = Y_a) = p''_{a'}(a),$$

где $K''_{X'} = K''_{a'}$ — проекция K''_A на a'-подмножество $X' \subseteq \mathfrak{X}_A$. Таким образом,

$$p^{\cap}_A(a) = \sum_{Y_a \subseteq X'} p'_A(a')\ p''_{a'}(a),$$

где суммирование происходит по подмножествам X', содержащим конкретное $Y_a \subseteq \mathfrak{X}_A$. Так как число a'-подмножеств, содержащих конкретное a-подмножество, равно $C^{a'-a}_{A-a}$, то переход в этой формуле к суммированию по мощности a' подмножеств X' дает формулу

$$p^{\cap}_A(a) = \sum_{a \le a'} C^{a'-a}_{A-a}\ p'_A(a')\ p''_{a'}(a) \qquad (\cap)$$

для мощностных вероятностей независимого пересечения случайных множеств K'_A и K''_A симметричных событий.

Замечание. Если K'_A и K''_A — случайные множества симметричных p-событий, независимых в совокупности, то их независимое пересечение

$$K^{\cap 2}_A = K'_A \cap K''_A$$

— это случайное множество симметричных p^2-событий, независимых в совокупности.

Действительно, поскольку в этом случае

$$p'_A(a') = p^{a'}(1-p)^{A-a'}, \quad p''_{a'}(a) = p^a(1-p)^{a'-a},$$

то из $(\cap)$ получаем

$$p^{\cap 2}_A(a) = p^{2a}(1-p^2)^{A-a}.$$

Но равенства

$$p^{\cap 2}_A(a) = q^a(1-q)^{A-a} = p^{2a}(1-p^2)^{A-a}, \quad a = 0, \ldots, A \qquad (\cap 2)$$

означают, что $K^{\cap 2}_A$ — случайное множество симметричных q-событий, независимых в совокупности, где $q = p^2$.

4.2.2 Дополнение случайного множества симметричных событий

Пусть K_A — случайное множество симметричных p-событий под $\mathfrak{X}_A$ с индивидуальным распределением мощности $\pi_A(a) = C_A^a p'_A(a)$. Его дополнение

$$K_A^c = \mathfrak{X}_A \setminus K_A$$

— это случайное множество симметричных $(1-p)$-событий, которое определяется под $\mathfrak{X}_A$ мощностными вероятностями

$$p_A^c(a) = p_A(A-a), \quad a = 0, \ldots, A. \tag{c}$$

4.2.3 Объединение случайных множеств симметричных событий

Пусть K'_A и K''_A — два независимых между собой случайных множества симметричных событий под $\mathfrak{X}_A$ с индивидуальными распределениями мощности $\pi'_A(a) = C_A^a p'_A(a)$ и $\pi''_A(a) = C_A^a p''_A(a)$ соответственно. Распределение их независимого объединения — случайного множества $K_A = K'_A \cup K''_A$, определенного также под $\mathfrak{X}_A$, можно получить, повторив выкладки, аналогичные тем, которые привели к мощностным вероятностям пересечения этих случайных множеств. Однако такой путь довольно утомителен. Гораздо короче того же результата можно добиться, если для случайных множеств событий K'_A и K''_A воспользоваться теоретико-множественными соотношениями де Моргана:

$$K'_A \cup K''_A = \Big((K'_A)^c \cap (K''_A)^c \Big)^c.$$

Из этих соотношений, а также из соотношений $(\cap)$ и (c) следует формула

$$p_A^{\cup}(a) = \sum_{a' \leq a} C_a^{a'} \; p'_A(a') \; p_{A-a'}(a-a'), \tag{$\cup$}$$

для мощностных вероятностей независимого объединения двух случайных множеств симметричных событий.

Замечание. Если K'_A и K''_A — случайные множества симметричных p-событий, независимых в совокупности, то их независимое объединение

$$K_A^{\cup 2} = K'_A \cup K''_A$$

— это случайное множество симметричных $(1-(1-p)^2)$-событий, независимых в совокупности.

Действительно, поскольку в этом случае

$$p'_A(a') = p^{a'}(1-p)^{A-a'}, \quad p''_{A-a'}(a-a') = p^{a-a'}(1-p)^{A-a},$$

то из $(\cup)$ получаем

$$p_A^{\cup 2}(a) = (1-p)^{2(A-a)}\left(1-(1-p)^2\right)^a.$$

Но равенства

$$p_A^{\cup 2}(a) = q^a(1-q)^{A-a} = \left(1-(1-p)^2\right)^a(1-p)^{2(A-a)}, \quad a = 0, \ldots, A, \quad (\cup 2)$$

означают, что $K_A^{\cup 2}$ — случайное множество симметричных q-событий, независимых в совокупности, где $q = 1-(1-p)^2$.

4.2.4 Разность двух случайных множеств симметричных событий

Пусть K'_A и K''_A — два независимых между собой случайных множества симметричных событий под $\mathfrak{X}_A$ с индивидуальными распределениями мощности $\pi'_A(a) = C_A^a p'_A(a)$ и $\pi''_A(a) = C_A^a p''_A(a)$ соответственно. Тогда независимая разность

$$K_A^- = K'_A \setminus K''_A$$

— это случайное множество симметричных событий, которое определяется под $\mathfrak{X}_A$ мощностными вероятностями по формуле

$$p_A^-(a) = \sum_{a \leq a'} C_{A-a}^{a'-a}\, p'_A(a')\, p''_{a'}(a'-a), \quad (-)$$

которую можно вывести из $(\cap)$ и (c), пользуясь соотношениями де Моргана, так как $K_A^- = K'_A \setminus K''_A = K'_A \cap \left(K''_A\right)^c$.

Замечание. Если K'_A и K''_A — случайные множества симметричных p-событий, независимых в совокупности, то независимая симметрическая разность

$$K_A^- = K'_A \setminus K''_A \quad (-2)$$

— это случайное множество симметричных q-событий, независимых в совокупности, где $q = p(1-p)$.

Действительно, поскольку в этом случае

$$p'_A(a') = p^{a'}(1-p)^{A-a'}, \quad p''_{a'}(a'-a) = p^{a'-a}(1-p)^a,$$

то из $(-)$ получаем

$$p_A^-(a) = (p(1-p))^a\,(1-p(1-p))^{A-a}.$$

Но равенства

$$p_A^-(a) = q^a(1-q)^{A-a} = (p(1-p))^a\,(1-p(1-p))^{A-a}, \quad a = 0, \ldots, A, \quad (-2)$$

означают, что K_A^- — случайное множество симметричных q-событий, независимых в совокупности, где $q = p(1-p)$.

4.2.5 Симметрическая разность случайных множеств симметричных событий

Пусть K'_A и K''_A — два независимых между собой случайных множества симметричных событий под $\mathfrak{X}_A$ с индивидуальными распределениями мощности $\pi'_A(a) = C^a_A p'_A(a)$ и $\pi''_A(a) = C^a_A p''_A(a)$ соответственно. Тогда их независимая симметрическая разность

$$K^{\triangle}_A = K'_A \triangle K''_A$$

— это случайное множество симметричных событий, которое определяется под $\mathfrak{X}_A$ мощностными вероятностями

$$p^{\triangle}_A(a) = \sum_{b \le a} \sum_{b' \le A-a} C^b_a C^{b'}_{A-a}\, p'_A(a-b+b')\, p''_A(b+b'). \qquad (\triangle)$$

В самом деле,

$$p^{\triangle}_A(a) = \mathbf{P}(K'_A \triangle K''_A = Y_a) = \sum_{X' \triangle X'' = Y_a} \mathbf{P}(K'_A = X')\mathbf{P}(K''_A = X'').$$

Так как равенство $X' \triangle X'' = Y_a$ эквивалентно тому, что $X'' = X' \triangle Y_a$, то сначала получим

$$p^{\triangle}_A(a) = \sum_{X' \subseteq \mathfrak{X}_A} \mathbf{P}(K'_A = X')\mathbf{P}(K''_A = X' \triangle Y_a).$$

Потом заметим, что для любого $X' \subseteq \mathfrak{X}_A$

$$X' \triangle Y_a = X' \setminus Y_a + Y_a \setminus X'$$

— множество $X' \triangle Y_a$ состоит из двух непересекающихся подмножеств, одно из которых содержится в X', а другое — в Y_a. Обозначим $b = |Y_a \setminus X'|$, $b' = |X' \setminus Y_a|$. Тогда

$$|X' \triangle Y_a| = b + b'$$

и любому $X' \subseteq \mathfrak{X}_A$ соответствует единственная пара (b, b'). Поэтому суммирование по всем подмножествам $X' \subseteq \mathfrak{X}_A$ можно заменить на двойное суммирование по b и b', которые независимо друг от друга меняются в пределах: $0 \le b \le a$, $0 \le b' \le a'$. Отсюда, а также из того, что $a' = a - b + b'$ и

$$\mathbf{P}(K'_A = X') = p'_A(a-b+b'), \quad \mathbf{P}(K''_A = X' \triangle Y_a) = p''_A(b+b'),$$

следует формула $(\triangle)$.

Замечание. Если K'_A и K''_A — случайные множества симметричных p-событий, независимых в совокупности, то их независимая симметрическая разность

$$K_A^{\triangle 2} = K'_A \triangle K''_A \qquad (\triangle 2)$$

— это случайное множество симметричных q-событий, независимых в совокупности, где $q = 2p(1-p)$.

Действительно, поскольку в этом случае

$$p'_A(a-b+b') = p^{a-b+b'}(1-p)^{2A-a-2b'}, \quad p''_A(b+b') = p^{b+b'}(1-p)^{A-b-b'},$$

то из $(\triangle)$ получаем

$$p_A^{\triangle}(a) = \Big(p(1-p)\Big)^a \Big(1-2p(1-p)\Big)^{A-a} \sum_{b\le a} C_a^b.$$

Но так как $\sum_{b\le a} C_a^b = 2^a$, то получаем равенство

$$p_A^{\triangle}(a) = \Big(2p(1-p)\Big)^a \Big(1-2p(1-p)\Big)^{A-a} = q^a(1-q)^{A-a},$$

выполнение которого для всех $a = 0, \ldots, A$, означает, что $K_A^{\triangle 2}$ — случайное множество симметричных q-событий, независимых в совокупности, где $q = 2p(1-p)$.

4.2.6 Терраски, слои и срезы случайных множеств симметричных событий

Пусть

$$K_A^{(\mathcal{W}_N)} = \left\{ K_A^{(w)}, \quad w \in \mathcal{W}_N \right\},$$

независимая N-совокупность одинаково симметрично распределенных случайных p-событий.

W-терраска этой N-совокупности случайных множеств определяется как случайное множество

$$\mathrm{ter}_W = \bigcap_{w\in W} K_A^{(w)} \bigcap_{w\in W^c} \left(K_A^{(w)}\right)^c, \quad W \subseteq \mathcal{W}_N.$$

n-слой этой N-совокупности случайных множеств определяется как объединение n-террасок:

$$C^n_{K_A^{(\mathcal{W}_N)}} = \sum_{|W|=n} \mathrm{ter}_W.$$

n-срез этой же N-совокупности случайных множеств определяется как объединение всех n-пересечений этих случайных множеств, или как непересекающееся объединение их слоев, начиная с порядка n:

$$C^{\geq n}_{K_A^{(\mathcal{W}_N)}} = \sum_{i \geq n} C^i_{K_A^{(\mathcal{W}_N)}}.$$

Лемма. n-слой $C^n_{K_A^{(\mathcal{W}_N)}}$ независимых в N-совокупности и одинаково симметрично распределенных случайных множеств событий

$$K_A^{(w)}, \quad w \in \mathcal{W}_N,$$

— это симметричное случайное множество q-событий, где

$$q = C_N^n p^n (1-p)^{N-n}.$$

5 Заключение

Основы теории, которую можно было рассматривать в качестве весьма предварительной модели структуры событий и обнаружения структуры "субсобытий", разработана. Это основы теории симметричных событий. Именно строго симметричные случайные события претендуют на роль математической модели "субсобытий" — "микрособытий" (редчайших событий), из которых, по нашему предположению при помощи теоретико-множественной операции объединения, сложены ядра всех остальных "макрособытий" (более частых событий) и которые образуют структуру субсобытий каждого события.

Одной из основных задач теории симметричных случайных событий в настоящее время следует признать *задачу обнаружения структуры субсобытий по наблюдениям за случайными событиями.* Решение этой задачи позволит определять основополагающие параметры наблюдаемых случайных событий: *собственную вероятность субсобытий* и *вероятностные числа наблюдаемых событий.* Собственная вероятность субсобытий, которые, как известно, равновероятны, — это, по сути дела, вероятность "редчайшего" из наблюдаемых объединений субсобытий. На этой интерпретации собственной вероятности могут быть основаны алгоритмы ее оценки из статистических данных. Вероятностные числа наблюдаемых случайных событий дают информацию о том, какое количество субсобытий порождает ядро данного наблюдаемого случайного события при своем объединении, а также информацию о его ядерной оболочке [3]. Знание вероятностей и вероятностных чисел наблюдаемых событий полностью определяет их структуру субсобытий и статистических взаимозависимостей между ними.

Задача обнаружения структуры субсобытий по результатам наблюдений за случайными событиями в настоящее время вполне удовлетворительно решена в некоторых частных постановках. Однако ограниченный объем работы не позволяет нам рассмотреть эти методы обнаружения структур субсобытий и заставляет подождать ближайших возможностей опубликования.

Мы будем иметь случай предложить разложение разума на структуры событий, и сами события будут рассматриваться как имеющие структуры субсобытий.

Благодарности

Автор благодарит ФАМ семинар за неизменное благорасположение к открытому, интересному и плодотворному обсуждению проблем эвентологии.

Литература

[1] Russell Bertrand (1957) *Human knowledge. Its Scope and limits.* London: George Allen and Unwin Ltd., Ruskin House, Museum Street. (перевод: Расселл Бертран (2001) *Человеческое познание. Его сфера и границы.* Киев–Москва: Ника-центр, ИОИ, 558с.)

[2] Воробьёв О.Ю., Е.Е.Голденок, Т.В.Куприянова, Д.В. Семёнова и А.Ю. Фомин (2003, в печати) *Теория случайных событий и её применение.* Красноярск: ИВМ СО РАН, 502с.

[3] Воробьёв О.Ю. (2003) Физические основания эвентологии. *Труды Второй Всероссийской ФАМ'2003 конференции.* Часть первая (Под ред. Олега Воробьёва). Красноярск: ИВМ СО РАН, 38–68.

[4] Воробьёв О.Ю., Е.Е.Голденок (2003) Удельная вероятность связей событий в случайном множестве событий. *Труды Второй Всероссийской ФАМ'2003 конференции.* Часть первая (Под ред. Олега Воробьёва). Красноярск: ИВМ СО РАН, 114–124.