Псевдометрики, порожденные функциями множества на булевых алгебрах

А.А. Новоселов
Институт вычислительного моделирования СО РАН
Академгородок, Красноярск, 660036
e-mail: anov@ksc.krasn.ru

Введение

Хорошо известно [1], что с помощью меры на булевой алгебре или σ-алгебре можно породить псевдометрику как меру симметрической разности множеств, между которыми измеряется расстояние. Представляет интерес обобщение этого результата на другие функции множества, заданные на булевых алгебрах. Одно такое обобщение в виде характеризации класса функций множества, порождающих псевдометрики (метрических функций множества), и предлагается в настоящей работе.

В параграфе 1 приведены необходимые сведения о псевдометриках и функциях множества, доказаны вспомогательные утверждения, дана собственно характеризация класса метрических функций в терминах некоторых неравенств, а также описаны способы переноса псевдометрики с булевой алгебры на основное множество. В параграфе 2 описана технология применения порожденных псевдометрик в задачах, связанных с распределениями случайных множеств и смежными вопросами.

1 Псевдометрики и функции множества

1.1 Псевдометрика

Пусть D – произвольное множество. Напомним, что *псевдометрикой* (псевдорасстоянием) на D называется произвольная неотрицательная

© 2002 А.А. Новоселов
Олег Воробьёв (ред.), Финансово-актуарная математика и смежные вопросы, Труды ФАМ'2002, Красноярск, ИВМ СО РАН

функция d, заданная на декартовом произведении $D \times D$, удовлетворяющая неравенству треугольника

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z); \;\; x,y,z \in D, \tag{1}$$

обладающая свойствами симметрии $d(x,y) = d(y,x)$; $x,y \in D$ и

$$x = y \implies d(x,y) = 0. \tag{2}$$

Если в (2) справедлива и обратная импликация, то есть, другими словами, расстояние между элементами $x, y \in D$ равно нулю только в случае их совпадения, то псевдометрика называется просто *метрикой*. Пара (D,d) называется при этом (псевдо) метрическим пространством. Известно, что, вводя на D отношение эквивалентности $\sim$ посредством

$$x \sim y \iff d(x,y) = 0$$

и переходя к фактор-пространству, любое псевдометрическое пространство легко превратить в метрическое. Такая процедура производится, например, в функциональном анализе при построении пространств L_p [1]. В данной работе мы ограничимся рассмотрением псевдометрик, поскольку перенос результатов на случай метрики не представляет затруднений.

Для удобства ссылок сформулируем два тривиальных результата в виде лемм.

Лемма 1. *Пусть (D,d) – псевдометрическое пространство, а $E \subset D$ – собственное подмножество D. Сужение d_E функции d на $E \times E$ задает псевдометрику на E.*

Мы будем обозначать псевдометрику на E тем же символом d, если из контекста ясно, о каком множестве идет речь.

Лемма 2. *Пусть (D,d) – псевдометрическое пространство, E – множество, равномощное D, $f : E \to D$ - отображение, осуществляющее взаимно-однозначное соответствие между E и D. Тогда (E, d_E) образует псевдометрическое пространство, где псевдометрика d_E задана посредством $d_E(u,v) = d(f(u), f(v))$, $u,v \in E$.*

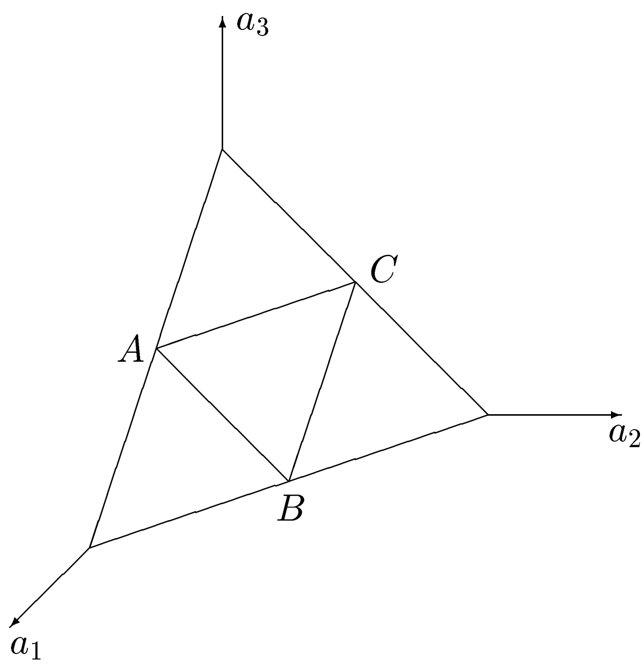

Рис. 1: Псевдометрики в $\mathbf{R}^3$

Обозначим $\mathcal{D} = \mathcal{D}(D)$ совокупность всевозможных симметричных вещественных функций d, заданных на $D \times D$ и обладающих свойством $d(x,x) = 0$; $x \in D$. Это множество образует линейное пространство относительно естественных операций сложения функций и умножения функции на число. Далее, обозначим

$$\mathcal{D}_+ = \mathcal{D}_+(D) = \{d \in \mathcal{D}(D) |\ d(x,y) \geq 0;\ x, y \in D\}$$

множество неотрицательных функций из $\mathcal{D}$, которое, очевидно, представляет собой выпуклый конус в $\mathcal{D}$, часто называемый неотрицательным конусом $\mathcal{D}$. Любая псевдометрика на D является, очевидно, элементом $\mathcal{D}_+$, обозначая $\mathcal{D}_{++} = \mathcal{D}_{++}(D)$ совокупность всех псевдометрик на D, имеем $\mathcal{D}_{++} \subseteq \mathcal{D}_+$, причем, за исключением тривиальных случаев, включение является собственным из-за ограничения, накладываемого неравенством треугольника. Нетрудно убедиться в том, что $\mathcal{D}_{++}$ также является выпуклым конусом в $\mathcal{D}$.

Примеры. Пусть сначала $D = \{x\}$ – одноточечное множество. Тогда $D \times D = \{(x,x)\}$ также является одноточечным и $d(x,x) = 0$ представляет собой единственную возможную псевдометрику. Здесь $\mathcal{D} = \mathcal{D}_+ = \mathcal{D}_{++} = \{0\}$ состоит из единственного (нулевого) элемента.

Пусть теперь $D = \{x, y\}$ состоит из двух элементов. Тогда любая функция из $\mathcal{D}(D)$ может быть задана посредством единственного параметра $d(x,y)=a$, то есть, $\mathcal{D}(\{x,y\})$ изоморфно $\mathbf{R}^1$. Неотрицательный конус $\mathcal{D}_+(\{x,y\})=\mathbf{R}_+=\{a\in\mathbf{R}^1|\ a\geq 0\}$ представляет собой положительную полуось, причем любая неотрицательная функция является псевдометрикой, то есть, $\mathcal{D}_{++}(\{x,y\})=\mathcal{D}_+(\{x,y\})$.

Рассмотрим трехэлементное множество $D=\{x,y,z\}$. Здесь пространство $\mathcal{D}(\{x,y,z\})$ задается уже тремя параметрами $d(x,y)=a_1, d(y,z)=a_2, d(z,x)=a_3$, то есть, изоморфно пространству $\mathbf{R}^3$ векторов $a=(a_1,a_2,a_3)$. Конус $\mathcal{D}_+(\{x,y,z\})$ при этом изоморфизме соответствует неотрицательному ортанту, а конус псевдометрик $\mathcal{D}_{++}(\{x,y,z\})$ – его собственному подмножеству. Для визуального представления $\mathcal{D}_{++}(\{x,y,z\})$ достаточно изобразить его сечение $\mathcal{D}^0_{++}(\{x,y,z\})$ любой поверхностью, обладающей тем свойством, что она пересекает каждый луч, исходящий из начала координат, и лежащий в $\mathcal{D}_+(\{x,y,z\})$, только один раз. Таким свойством обладает, например, плоскость $\{a\in\mathbf{R}^3|\ a_1+a_2+a_3=1\}$, в которой располагается и стандартный симплекс $\mathbf{R}^3$. На рисунке 1 представлен стандартный симплекс $\mathbf{R}^3$ и его часть, соответствующая $\mathcal{D}^0_{++}(\{x,y,z\})$, последняя образована треугольником ABC. Отметим, что все точки этого треугольника, за исключением вершин, соответствуют метрикам, тогда как вершины A, B, C соответствуют псевдометрикам d_A, d_B, d_C, приписывающим нулевое расстояние между различными точками множества D: $d_C(x,y)=0$, $d_A(y,z)=0$, $d_B(z,x)=0$.

1.2 Функции множества

Пусть $(M,\mathfrak{B})$ – измеримое пространство, то есть, M – множество, а $\mathfrak{B}$ – некоторая алгебра его подмножеств. Отображение $\mu:\ \mathfrak{B}\ \to\ \mathbf{R}$ принято называть *функцией множества*. Напомним, что *аддитивной* называется функция множества, удовлетворяющая условию

$$\mu(A\cup B)+\mu(A\cap B)=\mu(A)+\mu(B);\quad A,B\in\mathfrak{B}. \tag{3}$$

С функцией множества $\mu:\ \mathfrak{B}\ \to\ \mathbf{R}$ можно связать функцию двух множеств

$$d_\mu(A,B) = \mu(A\Delta B); \quad A,B \in \mathfrak{B}. \tag{4}$$

Выясним условия, необходимые для того, чтобы функция d_μ задавала псевдометрику на $\mathfrak{B}$. Во-первых, из (2) вытекает необходимое условие

$$\mu(\emptyset) = 0. \tag{5}$$

Во-вторых, ввиду представления $A = A\Delta\emptyset,\ A \in \mathfrak{B}$, условие неотрицательности значений псевдометрики влечет

$$\mu(A) \geq 0; \quad A \in \mathfrak{B}. \tag{6}$$

Представляет интерес и обратный вопрос: всякая ли псевдометрика d на $\mathfrak{B}$ порождается некоторой функцией множества μ, то есть, имеет вид d_μ из (4)? Ответ на этот вопрос отрицателен. Для того, чтобы убедиться в этом, достаточно привести пример метрики, не порождаемой функцией множества.

Пример. Рассмотрим двухэлементное множество $M = \{x,y\}$ с полной алгеброй подмножеств $\mathfrak{B} = \{\emptyset, \{x\}, \{y\}, \{x,y\}\}$. Поскольку псевдометрика из (4) зависит только от симметрической разности множеств-аргументов, для построения контрпримера достаточно задать метрику таким образом, чтобы для каких-либо двух пар множеств, имеющих одинаковые симметрические разности, расстояния были различными. Заметив, что

$$\emptyset \ \Delta \ \{x,y\} = \{x\}\Delta\{y\} = \{x,y\}, \tag{7}$$

зададим на $\mathfrak{B}$ псевдометрику

$$\begin{aligned} d(\emptyset,\{x\}) &= d(\emptyset,\{y\}) \\ = d(\{x,y\},\{x\}) &= d(\{x,y\},\{y\}) = 1, \\ d(\emptyset,\{x,y\}) = 2, &\quad d(\{x\},\{y\}) = 0. \end{aligned} \tag{8}$$

Ввиду (7) и (8), такая метрика не может быть порождена функцией множества посредством (4). Иллюстрация к данному примеру приведена на рисунке 2.

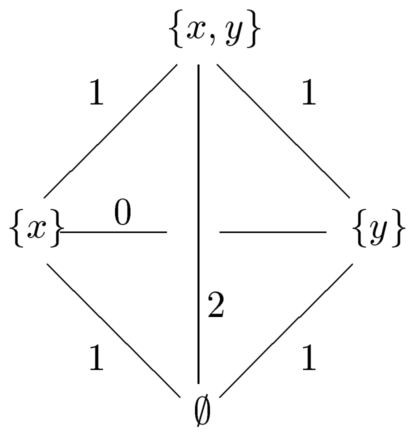

Рис. 2: Псевдометрика на $M = \{x, y\}$, не порождаемая функцией множества.

Обозначим $\mathcal{M}$ совокупность всех функций множества, обладающих свойством (5), и, снабдив его естественными операциями сложения и умножения на число, превратим его в линейное пространство. Ясно, что подмножество функций $\mathcal{M}_+ \subseteq \mathcal{M}$, удовлетворяющих условию (6), образует в $\mathcal{M}$ выпуклый конус, который естественно называть неотрицательным конусом $\mathcal{M}$. Кроме того, совокупность $\mathcal{M}_d$ всех функций множества, порождающих на $\mathfrak{B}$ псевдометрику, очевидно, лежит в $\mathcal{M}_+$, и само образует выпуклый конус в $\mathcal{M}$. Будем называть элементы $\mathcal{M}_d$ метрическими функциями множества и выясним состав $\mathcal{M}_d$.

Приведем здесь одну полезную лемму.

Лемма 3. Пусть $(M, \mathfrak{B})$ – измеримое пространство, μ – функция множества, и для произвольного набора попарно непересекающихся множеств $D, E, F \in \mathfrak{B}$ выполняется

$$\mu(D + E) \leq \mu(D + F) + \mu(E + F). \tag{9}$$

Тогда для произвольных множеств $A, B, C \in \mathfrak{B}$ имеет место

$$\mu(A\Delta B) \leq \mu(A\Delta C) + \mu(B\Delta C). \tag{10}$$

Замечание 1. Отметим, что (9) формально является частным случаем (10).

Замечание 2. Отметим, что условие (9) нетривиально в классе $\mathcal{M}_+$, то есть, в $\mathcal{M}_+$ существуют функции множества, не обладающие таким свойством. Для построения примера такой функции рассмотрим

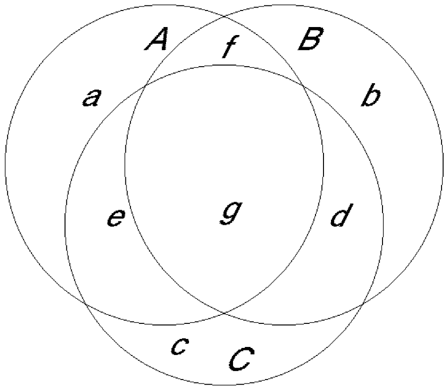

Рис. 3: Терраски трех подмножеств

двухточечное множество $M = \{a, b\}$ с полной алгеброй подмножеств $\mathfrak{B} = 2^M$ и зададим функцию μ равенствами

$$\mu(\emptyset) = \mu(M) = \mu(\{a\}) = 0, \;\; \mu(\{b\}) = 1.$$

Тогда (9) нарушается при выборе $D = \emptyset$, $E = \{b\}$, $F = \{a\}$.

Доказательство. Введем для террасок системы множеств A, B, C следующие обозначения (см. рисунок 3):

$$a = AB^cC^c, \;\; b = A^cBC^c, \;\; c = A^cB^cC,$$

$$d = A^cBC, \;\; e = AB^cC, \;\; f = ABC^c,$$

тогда справедливы представления

$$A\Delta B = a + e + b + d, \;\; A\Delta C = a + f + c + d, \;\; B\Delta C = b + f + c + e$$

и

$$\begin{aligned} &\mu(A\Delta C) + \mu(B\Delta C) - \mu(A\Delta B) \\ &= \mu(a + f + c + d) + \mu(b + f + c + e) - \mu(a + e + b + d) \\ &= \mu(D + F) + \mu(E + F) - \mu(D + E), \end{aligned}$$

где $D = a + d$, $E = b + e$, $F = c + f$, так что, действительно, (9) влечет (10). $\square$

1.3 Метрические функции множества

Для метрической функции множества μ из неравенства треугольника с необходимостью вытекает, что для произвольного набора попарно непересекающихся множеств $D, E, F \in \mathfrak{B}$ справедливо неравенство (9).

Как показывает следующая теорема, условие (9) оказывается не только необходимым, но и достаточным для метричности функции $\mu \in \mathcal{M}_+$.

Теорема 1. *$\mu \in \mathcal{M}_+$ является метрической в том и только в том случае, когда она удовлетворяет условию (9).*

Доказательство. Необходимость условия уже была отмечена. Для доказательства достаточности заметим, что выполнение всех свойств псевдометрики, кроме неравенства треугольника, обеспечивается включением $\mu \in \mathcal{M}_+$, а неравенство треугольника вытекает из (9) по лемме 2. $\square$

Элементы $\mathcal{M}_+$, являющиеся аддитивными функциями множества, представляют собой *меры*, и, как известно, являются метрическими [1]. Этот факт представляет собой частный случай предыдущей теоремы, поскольку для мер неравенство (9), очевидно, справедливо.

Приведем еще пример метрической функции множества из $\mathcal{M}_+$, не являющейся монотонной по включению. На полной алгебре $\mathfrak{B}$ подмножеств двухточечного множества $M = \{a, b\}$ рассмотрим функцию μ, заданную равенствами $\mu(\emptyset) = \mu(M) = 0$, $\mu(\{a\}) = \mu(\{b\}) = 1$. Она, очевидно, немонотонна, и, тем не менее, является метрической функцией множества. Этот пример легко обобщается на произвольные конечные множества M; достаточно задать $\mu(\emptyset) = \mu(M) = 0$ и $\mu(A) = 1$ для всех собственных подмножеств $A \subset M$.

1.4 Псевдометрика на основном множестве

Пусть, как и ранее, $(M, \mathfrak{B})$ является измеримым пространством. Мы выяснили, как с помощью функции множества μ на $\mathfrak{B}$ можно порождать псевдометрики на $\mathfrak{B}$. Если $|\mathfrak{B}| \geq |M|$, то любую порожденную таким образом псевдометрику можно перенести на основное множество M. Зафиксируем произвольную метрическую функцию множества μ, и пусть $N \subseteq \mathfrak{B}$ – некоторое подмножество в $\mathfrak{B}$, равномощное M, а $m : M \to N$ – какое-либо взаимно-однозначное соответствие между M и N. Тогда, по лемме 2, функция

$$d_m(x, y) = \mu(m(x)\Delta m(y)); \quad x, y \in M$$

задает псевдометрику на M.

2 Применение к распределениям случайных множеств

В данном параграфе описанная конструкция применяется к задачам, связанным с распределениями случайных множеств и аналогичными функциями множеств на сложных структурах. Здесь в качестве измеримого пространства $(M, \mathfrak{B})$ может выступать как пара $(\mathfrak{X}, 2^{\mathfrak{X}})$, где $\mathfrak{X}$ – конечное множество, так и $(2^{\mathfrak{X}}, 2^{2^{\mathfrak{X}}})$. Вероятностную меру, заданную на последнем пространстве, можно использовать для порождения псевдометрики на $2^{2^{\mathfrak{X}}}$, а по технологии параграфа 1.4 – и на $2^{\mathfrak{X}}$, и даже на $\mathfrak{X}$.

2.1 Надстройки

Рассмотрим измеримое пространство $(M, \mathfrak{B})$ и совокупность $2^{\mathfrak{B}}$ всевозможных подмножеств $\mathfrak{B}$. Построим два отображения из $\mathfrak{B}$ в $2^{\mathfrak{B}}$, которые будем использовать в дальнейшем.

Внешность. Зададим отображение $U : \mathfrak{B} \to 2^{\mathfrak{B}}$ следующим образом: для $A \in \mathfrak{B}$

$$U(A) = \{C \in \mathfrak{B} | \ C \supseteq A\}.$$

Такое отображение естественно называть внешностью. Обозначим $\mathcal{U}$ образ $\mathfrak{B}$ при этом отображении:

$$\mathcal{U} = \{U(A), \ A \in \mathfrak{B}\}.$$

Ясно, что U устанавливает между $\mathfrak{B}$ и $\mathcal{U}$ взаимно-однозначное соответствие, и обратное отображение $U^{-1}: \mathcal{U} \to \mathfrak{B}$ задается посредством

$$U^{-1}(\mathcal{C}) = \bigcap_{C \in \mathcal{C}} C, \ \ \mathcal{C} \in \mathcal{U}.$$

Внутренность. Зададим отображение $L: \mathfrak{B} \to 2^{\mathfrak{B}}$ следующим образом: для $A \in \mathfrak{B}$

$$L(A) = \{C \in \mathfrak{B} |\ C \subseteq A\}.$$

Такое отображение естественно называть внутренностью. Обозначим $\mathcal{L}$ образ $\mathfrak{B}$ при этом отображении:

$$\mathcal{L} = \{L(A), \ A \in \mathfrak{B}\}.$$

Ясно, что L устанавливает между $\mathfrak{B}$ и $\mathcal{L}$ взаимно-однозначное соответствие, и обратное отображение $L^{-1}: \mathcal{L} \to \mathfrak{B}$ задается посредством

$$L^{-1}(\mathcal{C}) = \bigcup_{C \in \mathcal{C}} C, \ \ \mathcal{C} \in \mathcal{L}.$$

Пример. Пусть $M = \{x, y\}$ состоит из двух элементов, а $\mathfrak{B}$ образует полную алгебру подмножеств M:

$$\mathfrak{B} = \{\emptyset, \{x\}, \{y\}, M\}.$$

При этом $2^{\mathfrak{B}}$ состоит из 16 элементов, причем в состав $\mathcal{U}$ входят:

$$U(\emptyset) = \mathfrak{B}; \ \ U(\{x\}) = \{\{x\}, M\};$$
$$U(\{y\}) = \{\{y\}, M\}; \ \ U(M) = \{M\},$$

а в состав $\mathcal{L}$:

$$L(M) = \mathfrak{B}; \ \ L(\{x\}) = \{\{x\}, \emptyset\};$$
$$L(\{y\}) = \{\{y\}, \emptyset\}; \ \ L(\emptyset) = \{M\}.$$

2.2 Псевдометрики на $\mathfrak{B}$

Если на измеримом пространстве $(\mathfrak{B}, 2^{\mathfrak{B}})$ задана метрическая функция множества μ, то, как и в параграфе 1.4, можно определить псевдометрику на $\mathfrak{B}$. Действительно, μ порождает псевдометрику d_μ на $2^{\mathfrak{B}}$

по обычному правилу

$$d_\mu(X,Y) = \mu(X\Delta Y), \quad X,Y \in 2^{\mathfrak{B}}.$$

По лемме 1 сужение d_μ на $\mathcal{U}\times\mathcal{U}$ образует псевдометрику на $\mathcal{U}$, а по лемме 2, возникает псевдометрика d^U на $\mathfrak{B}$[1]:

$$d^U(A,B) = d_\mu(U(A),U(B)), \quad A,B \in \mathfrak{B}.$$

Аналогично, сужение d_μ на $\mathcal{L}\times\mathcal{L}$ дает псевдометрику

$$d^L(A,B) = d_\mu(L(A),L(B)), \quad A,B \in \mathfrak{B}.$$

Отметим, что кроме внешности и внутренности, можно использовать и другие взаимно-однозначные отображения $\mathfrak{B}$ на различные собственные подмножества $2^{\mathfrak{B}}$, что приведет к большому разнообразию порождаемых псевдометрик на $\mathfrak{B}$. Действительно, пусть $\mathcal{W}$ – некоторое подмножество $2^{\mathfrak{B}}$, равномощное $\mathfrak{B}$, а $W : \mathfrak{B} \to \mathcal{W}$ – взаимно-однозначное соответствие между $\mathfrak{B}$ и $\mathcal{W}$. Тогда сужение d_μ на $\mathcal{W}\times\mathcal{W}$ дает требуемый результат посредством $d^W(A,B) = d_\mu(W(A),W(B)),\ A,B \in \mathfrak{B}$. Следует подчеркнуть, что таким способом всевозможные псевдометрики на $\mathfrak{B}$ не исчерпываются, см. пример в параграфе 1.2.

Рассмотрим введенные понятия на следующем примере. Пусть μ является вероятностной мерой на $2^{\mathfrak{B}}$ и задана значениями на элементах $\mathfrak{B}$:

$$\mu(\emptyset) = 0.5; \ \ \mu(\{x\}) = 0; \ \ \mu(\{y\}) = 0; \ \ \mu(M) = 0.5, \tag{11}$$

так что

$$\mu(\mathcal{C}) = \sum_{C\in\mathcal{C}} \mu(C); \ \ \mathcal{C} \in 2^{\mathfrak{B}}.$$

Тогда псевдометрика на $\mathfrak{B}$, порожденная этой мерой и отображением внешности, имеет вид

$$d^U(\emptyset,\{x\}) = \mu(U(\emptyset)\Delta U(\{x\})) = \mu\left(\mathfrak{B}\Delta\{\{x\},M\}\right) = \mu\left(\{\{y\},\emptyset\}\right) = 0.5,$$

и, аналогично,

$$d^U(\emptyset,\{y\}) = 0.5; \ \ d^U(\emptyset,M) = 0.5;$$

[1] Для случая, когда μ является вероятностной мерой, такая псевдометрика была рассмотрена в [2]

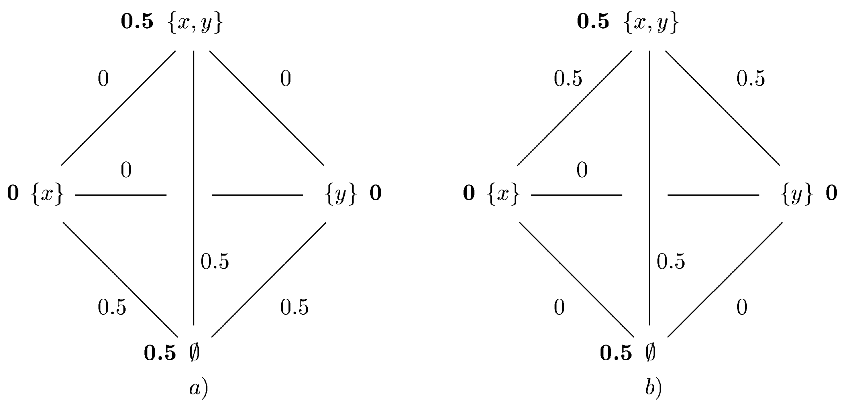

Рис. 4: Псевдометрики на $M = \{x, y\}$, порожденные отображениями внешности и внутренности.

$$d^U(\{x\}, M) = 0; \quad d^U(\{y\}, M) = 0; \quad d^U(\{x\}, \{y\}) = 0.$$

Для псевдометрики, порожденной отображением внутренности, имеем

$$d^L(\emptyset, \{x\}) = d^L(\emptyset, \{y\}) = d^L(\{x\}, \{y\}) = 0,$$

$$d^L(\emptyset, M) = d^L(M, \{x\}) = d^L(M, \{y\}) = 0.5.$$

На рисунках 4 a, b приведены значения меры (11) (жирным шрифтом) и псевдометрик d^U, d^L, соответственно.

Заключение

В работе приведена характеризация класса метрических функций множества $\mathcal{M}_d$ в терминах неравенств. Оказывается, что кроме аддитивных функций множества (мер), обычно используемых для порождения псевдометрик, можно использовать также субаддитивные функции и функции, не обладающие в полной мере никаким свойством аддитивности. Существенно супераддитивные функции множества в класс метрических не попадают.

Представляют интерес и другие способы характеризации класса метрических функций множества, например, в терминах отображений $\gamma : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$, оставляющих класс $\mathcal{M}_d$ инвариантным: $\gamma(\mathcal{M}_d) \subseteq \gamma(\mathcal{M}_d)$. Результаты такого рода предполагается опубликовать отдельно.

Автор выражает признательность участникам ФАМ Семинара за плодотворную критику и богатство блуждающих на семинаре идей.

Литература

[1] Канторович Л.В., Акилов Г.П. (1977) *Функциональный анализ.* М.: "Наука", 744 с.

[2] Куприянова Т.В. (2000) *Расстояние между множествами, навязываемое вероятностью.* Красноярск, КрасГУ, Деп. в ВИНИТИ от 22.11.00 № 2985-В00. 32 с.