От множества случайных событий до конфигурации случайных событий

О.Ю. Воробьёв
Институт вычислительного моделирования СО РАН
Красноярский государственный университет
а/я 8699, Академгородок, Красноярск, 660036
email: vorob@scn.ru

Основным и наиболее общим понятием теории случайных событий до самого недавнего времени считалось *случайное множество событий* [3], определяемое стандартным образом как случайный элемент (измеримое отображение)

$$K : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}) \to \left(2^{\mathfrak{X}}, 2^{2^{\mathfrak{X}}}\right),$$

значениями которого служат всевозможные подмножества конечного множества событий $\mathfrak{X}$, выделенных в алгебре $\mathcal{F}$ вероятностного пространства: $\mathfrak{X} \subseteq \mathcal{F}$.

Во многих приложениях (экономические рынки, медицина, безопасность и т.п.) этой модели оказывалось достаточной для математического описания вероятностного распределения соответствующих случайных событий (совершение покупки, использование услуги, заболевание, чрезвычайная ситуация и т.п.). Однако, "то там, то здесь" возникали и продолжают возникать задачи, которые не вписываются в модель случайного множества событий, или — вписываются, но после чрезмерных предположений. Стала очевидна насущная потребность в математическом понятии, более широком, нежели случайное множество событий, но сохраняющим его основные привлекательные свойства — *абстрактность и свобода* от привычных структур.

Грядущие события
бросают тень перед собой.
Александр Кэмпбелл.

Грядущее событие бросает перед собой не одну тень, а целый спектр теней — *спектр своих состояний.* В этом спектре трудно не заметить

Олег Воробьёв (ред.), Финансово-актуарная математика и смежные вопросы, Труды ФАМ'2002, Красноярск, ИВМ СО РАН

одну большую устойчивую тень — *невозможное состояние* грядущего события — тень от его ненаступления, которая особенно заметна, когда событие ожидается с нетерпением. Все остальные тени — это возможные тени от наступления события, которые все вместе образуют его *спектр возможных состояний.* Такое естественное разбиение множества состояний события порождает соблазнительную идею — взглянуть на случайные события как на *случайную конфигурацию событий.* Это — новое и, пожалуй, наиболее общее на сегодняшний день понятие теории случайных событий определяется также вполне стандартным образом как случайный элемент (измеримое отображение)

$$\boldsymbol{g} : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}) \to \left(n^{\mathfrak{X}}, 2^{\left(n^{\mathfrak{X}}\right)}\right),$$

значениями которого служат так называемые конфигурации событий, а $n^{\mathfrak{X}}$ обозначает множество всех таких конфигураций под конечным множеством событий $\mathfrak{X}$, выделенных в алгебре $\mathcal{F}$ вероятностного пространства: $\mathfrak{X} \subseteq \mathcal{F}$. Таким образом, каждому событию $x \in \mathfrak{X}$ разрешается ”наступать” в виде одного из n неупорядоченных состояний, среди которых есть и состояние его ”ненаступления”.

Продвижение от случайного множества событий к случайной конфигурации событий отдаленно напоминает продвижение от случайного булева вектора, компоненты которого могут принимать лишь два значения, к случайному вектору, компонентам которого разрешено принимать более двух значений. Аналогия становится более тесной, если считать что компоненты векторов неупорядочены, и — полной, если забыть о числовой природе компонент.

С помощью случайной конфигурации событий удается описать практически все мыслимые и тем более встречающиеся на практике случайные стечения обстоятельств — случайные комбинации событий. Кроме того, что наиболее важно, удается предложить классы вероятностных распределений случайных конфигураций событий, имеющие достаточно приемлемые свойства вычислимости, которые позволяют оценивать распределения на основе реальной и вполне доступной статистики случайных событий.

Предварительные определения

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ — вероятностное пространство, а $\mathfrak{X} \subseteq \mathcal{F}$ — некоторое конечное множество событий из алгебры событий $\mathcal{F}$, состоящее из $N = |\mathfrak{X}|$ событий. Будем обозначать $x^c = \Omega \setminus x$ дополнение события $x \in \mathfrak{X}$ — его состояние, которое станем назвать *невозможным состоянием* события x.

Определим для каждого $x \in \mathfrak{X}$ конечное множество событий[1]

$$S_x = S_x(x) = \{a_x, b_x, c_x, \ldots, u_x\} \subseteq \mathcal{F}$$

— *спектр возможных состояний события*[2] x, под которым понимается множество фрагментов некоторого произвольного разбиения события x:

$$x = \sum_{w_x \in S_x} w_x.$$

Считается, что мощность спектров возможных состояний всех событий одинакова:

$$|S_x| = n - 1, \quad x \in \mathfrak{X}.$$

Это — слабое ограничение, так как в рассматриваемой конечной ситуации всегда можно положить

$$n - 1 = \max_x |S_x|,$$

и если у какого-то события x окажется меньше, чем $n-1$ состояний, дополнить его спектр "пустыми фрагментами", каждое из которых — невозможное событие[3] $\emptyset \in \mathcal{F}$.

---

[1] Здесь и дальше используется не совсем корректная короткая запись вместо корректной, но более громоздкой:

$$S_{\{x\}} = S_{\{x\}}(\{x\}).$$

[2] Возможные состояния события x обозначаются малыми латинскими буквами с индексом x: $a_x, b_x, c_x, \ldots, u_x, w_x, \ldots$.

[3] Уместно указать на различие между *невозможным событием* $\emptyset \in \mathcal{F}$ и *невозможным состоянием* события x — его дополнением $x^c \in \mathcal{F}$.

Таким образом каждое $x \in \mathfrak{X}$ представимо в виде разбиения

$$x = \underbrace{a_x + b_x + c_x + \ldots + u_x}_{n-1}$$

на более мелкие фрагменты — его возможные состояния $a_x, b_x, \ldots, u_x \in \mathcal{F}$. Ясно, что каждое $x \in \mathfrak{X}$ может наступить или не наступить либо в виде состояния из спектра S_x, либо в виде невозможного состояния x^c. Иначе говоря, каждое x разбивает Ω на n непересекающихся фрагментов — состояний события x:

$$x^c + \underbrace{a_x + b_x + c_x + \ldots + u_x}_{n-1} = \Omega, \quad x \in \mathfrak{X}.$$

Обозначим $S_\emptyset = S_\emptyset(x)$ — *спектр невозможных состояний события* $x \in \mathfrak{X}$, и будем считать, что для каждого $x \in \mathfrak{X}$

$$S_\emptyset(x) = \{x^c\}$$

— спектр невозможных состояний состоит только из одного фрагмента x^c — дополнения события x.

Обозначим

$$S(x) = S_\emptyset(x) + S_x(x) = \{x^c, \underbrace{a_x, b_x, c_x, \ldots, u_x}_{n-1}\}$$

— *спектр всех состояний*, или *спектр события* $x \in \mathfrak{X}$. Как можно заметить, предлагается асимметричный взгляд на одно из состояний спектра $S(x)$ — невозможное состояние[4] x^c, как на уникальное событие, *одиноко* противостоящее спектру возможных состояний события x.

[4] Хотя формально ничего не мешает определить для события x^c свой собственный спектр возможных состояний $S_{x^c} = S_{x^c}(x^c)$, такой что

$$x^c = \sum_{w_x \in S_{x^c}} w_x,$$

но в том-то и заключается предлагаемая идея, чтобы разбивать — разлагать в спектр — лишь само событие, оставляя его невозможное состояние в виде "монолитного блока".

Множество комбинаций возможных и невозможных состояний всего множества событий $\mathfrak{X} = \{x_1, \ldots, x_N\}$ — так называемое *множество конфигураций* — образует декартово произведение

$$\bigotimes_{x \in \mathfrak{X}} S(x) = S(x_1) \times \ldots \times S(x_N).$$

Напомним, что

$$n = |S(x)|, \quad x \in \mathfrak{X},$$

— мощности всех спектров одинаковы, и введем специальное обозначение[5]

$$n^{\mathfrak{X}} = \bigotimes_{x \in \mathfrak{X}} S(x)$$

для *множества конфигураций* конечного множества событий $\mathfrak{X}$, где

$$\left| n^{\mathfrak{X}} \right| = n^{|\mathfrak{X}|} = n^N$$

— мощность множества конфигураций.

Полезно также ввести следующее

Определение. *Спектром возможных состояний* события $x \in \mathfrak{X}$ называется множество событий

$$S_x(x) = \{\underbrace{a_x, \ldots, u_x}_{n-1}\},$$

состоящее из событий — фрагментов разбиения события x:

$$x = \sum_{w_x \in S_x^1} w_x.$$

Спектром невозможных состояний события $x \in \mathfrak{X}$ называется множество событий

$$S_{\emptyset}(x) = \{x^c\},$$

состоящее из единственного события x^c. *Спектром всех состояний*, или коротко *спектром события* $x \in \mathfrak{X}$ называется множество событий

$$S(x) = \{x^c\} + \{\underbrace{a_x, \ldots, u_x}_{n-1}\} = S_{\emptyset}(x) + S_x(x),$$

[5] Поскольку имя Гиббса тесно связано с множеством конфигураций в статистической физике, то, скорее всего, наиболее подходящим названием для множества конфигураций $n^{\mathfrak{X}}$ может быть *гиббсеан* — по аналогии с *булеаном* $2^{\mathfrak{X}}$, название которого связывают с именем Буля.

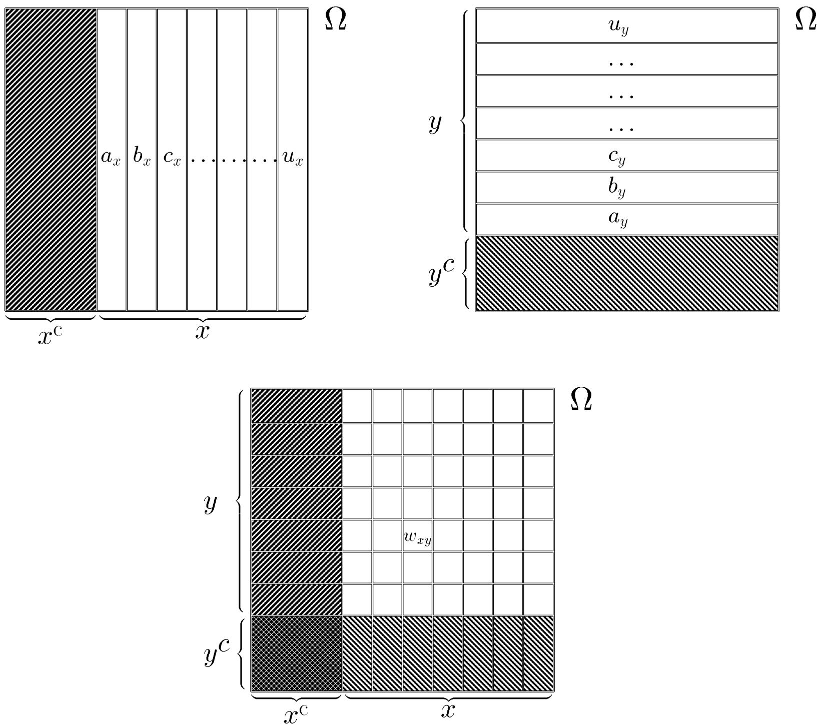

Рис. 1: Разбиение пространства элементарных событий Ω бозон-событием x (слева вверху), бозон-событием y (справа вверху) и (внизу) парой бозон-событий $\{x, y\}$.

которое разбивается на две части — спектр возможных состояний и спектр невозможных состояний.

Заметим ещё, что спектр некоторого произвольного события не может состоять меньше, чем из двух событий — соответствующих фрагментов разбиения Ω:

$$S(x) = \{x^c, x\} = \{x^c\} + \{x\} = S_\emptyset(x) + S_x(x)$$

— самого события x и его дополнения x^c. Так что спектр $S_x(x)$ возможных состояний события x не может состоять меньше, чем из одного фрагмента: $S_x(x) = \{x\}$.

Определение. Всякий раз, когда спектр возможных состояний события x состоит из одного события:

$$S_x(x) = \{x\},$$

событие x называется *фермион-событием*, в противном случае — x называется *бозон-событием*.

Спектр произвольного события x считается составленным из фермион-событий

$$x^c, a_x, \dots, u_x.$$

Отметим ещё раз, что $S(x)$ — спектр произвольного события $x \in \mathfrak{X}$ — это всегда некоторое разбиение Ω, так как

$$\sum_{w_x \in S(x)} w_x = \Omega, \quad x \in \mathfrak{X}.$$

На рис. 1 показано (слева вверху) *бозон-событие* x, разбивающее пространство элементарных событий Ω на фермион-события $w_x \in S(x)$:

$$\Omega = \sum_{w_x \in S(x)} w_x,$$

(справа вверху) *бозон-событие* y, разбивающее пространство элементарных событий Ω на случайные фермион-события $w_y \in S(y)$:

$$\Omega = \sum_{w_y \in S(y)} w_y,$$

и (внизу) *пара бозон-событий* x и y, разбивающая пространство элементарных событий Ω на фермион-события $w_{xy} \in S(x, y)$:

$$\Omega = \sum_{w_x \in S(x)} \sum_{w_y \in S(y)} w_x \cap w_y = \sum_{w_{xy} \in S(x,y)} w_{xy},$$

где $w_{xy} = w_x \cap w_y$.

Замечание. Спектр $S(x, y)$ пары бозон-событий $\{x, y\}$ можно представить в виде разбиения на четыре части[6]:

$$S(x, y) = S_{\emptyset}(x, y) + S_x(x, y) + S_y(x, y) + S_{xy}(x, y) \qquad (\star)$$

— *спектры возможных состояний* четырёх событий:

$$x^c \cap y^c, \quad x \cap y^c, \quad x^c \cap y, \quad x \cap y,$$

которые однозначно могут быть "занумерованы" подмножествами

$$\emptyset, \quad \{x\}, \quad \{y\}, \quad \{x, y\}$$

[6] Здесь также используется сокращенные обозначения, например: $S_{xy}(x, y)$ вместо $S_{\{x,y\}}(\{x, y\})$.

наступивших событий из дуплета $\{x, y\}$. Каждая из четырёх частей разбиения определяется так:

$$S_\emptyset(x,y) = \{x^c \cap y^c\},$$

$$S_x(x,y) = \{w_x \cap y^c, \quad w_x \in S_x(x)\}, \qquad S_y(x,y) = \{x^c \cap w_y, \quad w_y \in S_y(y)\}$$

$$S_{xy}(x,y) = \{w_x \cap w_y, \quad w_x \in S_x(x), w_y \in S_y(y)\}.$$

Разбиение ($\star$) является "двумерным" обобщением соответствующего разбиения "одномерного" спектра:

$$S(x) = S_\emptyset(x) + S_x(x).$$

Случайная конфигурация событий

Как уже было отмечено, случайная конфигурация событий — это аналог многомерного случайного вектора с неупорядоченными компонентами нечисловой природы, которым разрешено принимать более двух значений. Прежде, чем давать общее определение, определим то, аналогом чего является одномерный случайный вектор, иначе говоря — одна компонента случайного вектора. Речь идёт о *случайном бозон-событии.*

Определение. *Случайным бозон-событием* g_x называется случайный элемент

$$g_x : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}) \to \left(n^{\{x\}}, 2^{\left(n^{\{x\}}\right)}\right)$$

со значениями из гиббсеана $n^{\{x\}}$.

Случайное бозон-событие g_x — это *случайная конфигурация событий* на гиббсеане $n^{\{x\}}$, или *случайная 1-конфигурация событий* с n возможными значениями, определяемая распределением вероятностей:

$$\mathbf{P}(g_x = w_x) = \mathbf{P}(w_x), \quad w_x \in n^{\{x\}}.$$

Поскольку

$$n^{\{x\}} = S(x) = \{x^c, a_x, \ldots, u_x\} = \{x^c\} + \{a_x, \ldots, u_x\} = S_\emptyset(x) + S_x(x),$$

то распределение вероятностей случайного бозон-события — это n вероятностей:

$$\mathbf{P}(g_x = x^c),\ \mathbf{P}(g_x = a_x), \ldots,\ \mathbf{P}(g_x = u_x).$$

Причем[7]

$$\mathbf{P}(g_x \in S_x(x)) = \mathbf{P}(x), \quad \mathbf{P}(g_x \in S_\emptyset(x)) = \mathbf{P}(g_x = x^c) = \mathbf{P}(x^c)$$

— вероятности попадания случайного бозон-события g_x в спектры $S_x(x)$ и $S_\emptyset(x)$ равны вероятности бозон-события x и его дополнения x^c соответственно.

Определение. *Случайная конфигурация событий* — это вектор

$$\boldsymbol{g} = \{g_x,\ x \in \mathfrak{X}\},$$

составленный из неупорядоченных случайных бозон-событий g_x, иначе говоря, — это измеримое отображение

$$\boldsymbol{g} : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}) \to \left(n^{\mathfrak{X}}, 2^{\left(n^{\mathfrak{X}}\right)}\right),$$

где $\mathfrak{X} \subseteq \mathcal{F}$ — выделенное конечное множество событий, $n^{\mathfrak{X}}$ — множество всех конфигураций под $\mathfrak{X}$ (*гиббсеан конфигураций*).

Распределение вероятностей случайной конфигурации событий $\boldsymbol{g}$ представляет собой набор из n^N вероятностей:

$$\mathcal{P}(\boldsymbol{w}) = \mathbf{P}(\boldsymbol{g} = \boldsymbol{w}),$$

где

$$\boldsymbol{w} = \{w_x,\ x \in \mathfrak{X}\} \in n^{\mathfrak{X}},$$

произвольное значение случайной конфигурации $\boldsymbol{g}$ — вектор $\boldsymbol{w}$, неупорядоченные компоненты которого w_x — это фермион-события из спектров $S(x)$ соответствующих событий $x \in \mathfrak{X}$. Итак, распределение вероятностей

$$\left\{\mathcal{P}(\boldsymbol{w}),\ \boldsymbol{w} \in n^{\mathfrak{X}}\right\}$$

[7] События $\{g_x \in S_\emptyset(x)\}$ и $\{g_x = x^c\}$ эквивалентны, так как $S_\emptyset(x) = \{x^c\}$ — спектр невозможных состояний содержит только одно событие: x^c.

определяет совместное распределение случайных бозон-событий g_x, $x \in \mathfrak{X}$, образующих случайную конфигурацию $\boldsymbol{g}$.

Не трудно заметить, что событие $\{\boldsymbol{g} = \boldsymbol{w}\}$ — *наступление конфигурации событий* $\boldsymbol{w}$ — определяется как

$$\{\boldsymbol{g} = \boldsymbol{w}\} = \bigcap_{x \in \mathfrak{X}} \{g_x = w_x\} = \bigcap_{x \in \mathfrak{X}} w_x$$

— пересечение (в Ω) соответствующих фермион-событий w_x — состояний, в которых наступили события $x \in \mathfrak{X}$. Поэтому распределение вероятностей случайной конфигурации событий $\boldsymbol{g}$ можно записать в виде:

$$\mathcal{P}(\boldsymbol{w}) = \mathbf{P}(\boldsymbol{g} = \boldsymbol{w}) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{x \in \mathfrak{X}} w_x\right), \quad \boldsymbol{w} \in n^{\mathfrak{X}}.$$

Определение. Каждая случайная конфигурация событий $\boldsymbol{g}$ под $\mathfrak{X}$ определяет на булеане $2^{\mathfrak{X}}$ распределение вероятностей

$$p(X) = \mathbf{P}(K_{\boldsymbol{g}} = X) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{x \in X} \left\{g_x \in S_x^1\right\} \bigcap_{x \in X^c} \left\{g_x \in S_x^0\right\}\right), \quad X \in 2^{\mathfrak{X}},$$

которое задает под $\mathfrak{X}$ *случайное множество* $K_{\boldsymbol{g}}$ *событий, наступивших в случайной конфигурации* $\boldsymbol{g}$. $K_{\boldsymbol{g}}$ будем также называть *случайно – множественным базисом случайной конфигурации событий* $\boldsymbol{g}$.

Данное определение основано на очевидных равенствах событий (из алгебры $\mathcal{F}$):

$$\{K_{\boldsymbol{g}} = X\} = \bigcap_{x \in X} \{g_x \in S_x(x)\} \bigcap_{x \in X^c} \{g_x \in S_{\emptyset}(x)\}, \quad X \in 2^{\mathfrak{X}}. \qquad (*)$$

Заметим сразу, что распределение случайно – множественного базиса $K_{\boldsymbol{g}}$ можно переписать в эквивалентном виде:

$$p(X) = \mathbf{P}(K_{\boldsymbol{g}} = X) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{x \in X} \{g_x \neq x^c\} \bigcap_{x \in X^c} \{g_x = x^c\}\right), \quad X \in 2^{\mathfrak{X}},$$

который следует из $(*)$ и равенств событий:

$$\{g_x \in S_x(x)\} = \{g_x \neq x^c\}, \quad \{g_x \in S_{\emptyset}(x)\} = \{g_x = x^c\}, \quad x \in \mathfrak{X}.$$

Обозначим

$$e_X = \bigcap_{x \in X} \{g_x \neq x^c\} \bigcap_{x \in X^c} \{g_x = x^c\}, \quad X \in 2^{\mathfrak{X}},$$

события, которые, как не трудно заметить, образуют так называемую "полную группу событий":

$$\sum_{X \in 2^{\mathfrak{X}}} e_X = \Omega.$$

Теорема (о разложении случайной конфигурации событий по случайно – множественному базису). *Пусть* $\boldsymbol{g} = \{g_x,\ x \in \mathfrak{X}\}$ *— случайная конфигурация событий на гиббсеане* $n^{\mathfrak{X}}$ *с распределением*

$$\mathcal{P}(\boldsymbol{w}) = \mathbf{P}(\boldsymbol{g} = \boldsymbol{w}) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{x \in \mathfrak{X}} \{g_x = w_x\}\right), \quad \boldsymbol{w} \in n^{\mathfrak{X}},$$

а $K_{\boldsymbol{g}}$ *— её случайно – множественный базис с распределением*

$$p_{\boldsymbol{g}}(X) = \mathbf{P}(K_{\boldsymbol{g}} = X), \quad X \in 2^{\mathfrak{X}}.$$

Тогда для распределения $\mathcal{P}$ *справедливо разложение*

$$\mathcal{P}(\boldsymbol{w}) = \sum_{X \in \mathfrak{X}} \mathcal{P}_{|X}(\boldsymbol{w}) \cdot p_{\boldsymbol{g}}(X), \tag{1}$$

где, во-первых,

$$\mathcal{P}_{|X}(\boldsymbol{w}) = \mathbf{P}\left(\boldsymbol{w} \mid e_X\right), \quad X \in 2^{\mathfrak{X}}, \tag{2}$$

— условные распределения случайной конфигурации $\boldsymbol{g}$ *при условии случайного события* e_X*, которое заключается в том, что* X*-подмножество компонент конфигурации* $\{g_x, x \in X\}$ *— это возможные состояния (из спектра* $S_x(x)$*) событий* $x \in X$*, а остальные, образующие подмножество* $\{g_x, x \in X^c\}$*, — это невозможные состояния (из спектра* $S_\emptyset(x)$*) событий* $x \in X^c$*, и во-вторых,*

$$p_{\boldsymbol{g}}(X) = \mathbf{P}(e_X), \quad X \in 2^{\mathfrak{X}},$$

— вероятности этих случайных событий.

Доказательство теоремы становится очевидным, если заметить, что (1) — это всего лишь формула полной вероятности.

Определение. Совокупность

$$\Delta_{\boldsymbol{g}} = \left\{\mathcal{P}_{|X}(\boldsymbol{w}),\ X \in 2^{\mathfrak{X}}\right\},$$

составленная из условных распределений (2), называется *конфигурационной надстройкой случайной конфигурации* $\boldsymbol{g}$. Разложение (1) называется *разложением случайной конфигурации событий* $\boldsymbol{g}$ *по случайно – множественному базису* $K_{\boldsymbol{g}}$.

Замечание. Сумма из правой части формулы (1) всегда имеет только одно ненулевое слагаемое. Это объясняется тем, что

$$\mathcal{P}_{|X}(\boldsymbol{w}) \begin{cases} > 0, & \boldsymbol{w} \in S_X(\mathfrak{X}), \\ = 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Поэтому, на самом деле, формула (1) для $X \in 2^{\mathfrak{X}}$ и всех $\boldsymbol{w} \in S_X(\mathfrak{X})$ всегда имеет тривиальный вид:

$$\mathcal{P}(\boldsymbol{w}) = \mathcal{P}_{|X}(\boldsymbol{w}) \cdot p_{\boldsymbol{g}}(X). \tag{1'}$$

Случайные конфигурации событий с независимой конфигурационной надстройкой

Первое предположение — независимость конфигурационной надстройки. Рассмотрим случайную конфигурацию $\boldsymbol{g}$, вся структура взаимозависимостей случайных событий которой сосредоточена в случайно – множественном базисе $K_{\boldsymbol{g}}$. Это предположение означает, что конфигурационная надстройка $\Delta_{\boldsymbol{g}}$ состоит из независимых условных распределений вероятностей при условии e_X:

$$\mathcal{P}_{|X}(\boldsymbol{w}) = \begin{cases} \prod\limits_{x \in X} \mathcal{P}_{x|X}(w_x), & \boldsymbol{w} \in S_X(\mathfrak{X}), \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

где

$$\mathcal{P}_{x|X}(w_x) = \mathbf{P}(g_x = w_x \mid e_X), \quad X \in 2^{\mathfrak{X}},$$

— условные индивидуальные распределения вероятностей случайных бозон-событий $x \in X$ при условии, что $\{K_{\boldsymbol{g}} = X\}$ — наступившие события образуют подмножество $X \subseteq \mathfrak{X}$.

Второе предположение — согласованная независимость условных распределений. Сделаем ещё одно довольно сильное предположение независимости. Будем считать, что для всех $X \in 2^{\mathfrak{X}}$

$$\mathcal{P}_{x|X}(w_x) = \mathcal{P}_x(w_x)/\mathbf{P}(x) = \mathbf{P}(g_x = w_x)/\mathbf{P}(x), \quad x \in X,$$

— все условные индивидуальные распределения вероятностей $\mathcal{P}_{x|X}$ пропорциональны индивидуальным распределениям вероятностей $\mathcal{P}_x$ случайных бозон-событий g_x, $x \in X$.

Из сделанных предположений независимости и формулы (1') сначала получаем формулу для условных распределений:

$$\mathcal{P}_{|X}(\boldsymbol{w}) = \begin{cases} \dfrac{\prod\limits_{x \in X} \mathcal{P}_x(w_x)}{\prod\limits_{x \in X} \mathbf{P}(x)}, & \boldsymbol{w} \in S_X(\mathfrak{X}), \\ 0, & \text{иначе}, \end{cases}$$

а затем формулу для распределения вероятностей случайной конфигурации $\boldsymbol{g}$:

$$\mathcal{P}(\boldsymbol{w}) = \frac{\prod\limits_{x \in X} \mathcal{P}_x(w_x)}{\prod\limits_{x \in X} \mathbf{P}(x)} \cdot p_{\boldsymbol{g}}(X) \tag{3}$$

для всех $\boldsymbol{w} \in S_X(\mathfrak{X})$.

Гиббсовская случайная конфигурация событий

Рассмотрим произвольное бозон-событие $x \in \mathfrak{X}$, в спектре возможных состояний которого

$$S_x(x) = \{a_x, \ldots, u_x\}$$

все фермион-события имеют строго положительные вероятности:

$$\mathbf{P}(a_x) \geq \ldots \geq \mathbf{P}(u_x) > 0.$$

Определение. Будем называть случайное бозон-событие g_x, $x \in \mathfrak{X}$, имеющее спектр

$$S(x) = S_\emptyset(x) + S_x(x), = \{x^c\} + S_x(x),$$

гиббсовским с параметрами (β_x, p_x) всякий раз, когда[8] его распределение можно представить в виде

$$\mathcal{P}_x(w) = \begin{cases} \exp\{-\beta_x H(w)\}, & w \in S_x(x), \\ \\ 1 - p_x, & w = x^c, \end{cases}$$

где $p_x = \mathbf{P}(x)$ — вероятность бозон-события x, β_x — его обратная статистическая температура, а $H(w)$ — статистическая энергия фермион-событий $w \in S_x(x)$ — произвольных значений случайного бозон-события g_x.

В спектре

$$S_x(x) = \{a_x, \ldots, u_x\}$$

возможных состояний события x всегда найдется фермион-событие с максимальной вероятностью, которое (в наших не умаляющих общность обозначениях) обозначено a_x:

$$\mathbf{P}(a_x) = \max_{w \in S_x^1} \mathbf{P}(w).$$

"Максимальное" фермион-событие a_x определяет ещё один параметр, характеризующий распределение гиббсовского случайного бозон-события x:

$$H_x = H(a_x)$$

— *минимальное значение статистической энергии возможных состояний* события x, которое задает так называемый *"слепой интервал"* $[0, H_x]$, отделяющий от нуля все остальные значения статистической энергии:

$$0 < H_x \le H(b_x) \le \ldots H(u_x).$$

Определение. *Гиббсовской случайной 1-конфигурацией событий* называется случайная конфигурация событий g_x, определенная под моноплетом $\{x\} \subseteq \mathfrak{X}$, и представляющая собой гиббсовское случайное бозон-событие.

[8] Не трудно понять, что бозон-событие x будет гиббсовским всякий раз, когда все фермион-события из его спектра возможных состояний $S_x(x)$ имеют строго положительные вероятности.

Таким образом, *гиббсовская случайная 1-конфигурация событий* g_x определена на гиббсеане

$$n^{\{x\}} = S(x) = S_\emptyset(x) + S_x(x) = \{x^c, a_x, \ldots, u_x\}$$

распределением вероятностей

$$\mathcal{G}_x(w) = \mathbf{P}(g_x = w) = \begin{cases} \exp\{-\beta_x H(w)\}, & w \in S_x(x), \\ \\ 1 - p_x, & w = x^c. \end{cases} \tag{4}$$

Определение. *Гиббсовской случайной 2-конфигурацией событий* называется случайная конфигурация событий $\boldsymbol{g}$ под дуплетом $\{x, y\} \subseteq \mathfrak{X}$, распределение вероятностей которой имеет вид:

$$\mathcal{G}_{xy}(\boldsymbol{w}) = \mathbf{P}(\boldsymbol{g} = \boldsymbol{w}) = \begin{cases} \exp\{-\beta_{xy} H(\boldsymbol{w})\}, & \boldsymbol{w} \in S_{xy}(x,y), \\ \\ \exp\{-\beta_x H(\boldsymbol{w})\}, & \boldsymbol{w} \in S_x(x,y), \\ \\ \exp\{-\beta_y H(\boldsymbol{w})\}, & \boldsymbol{w} \in S_y(x,y), \\ \\ \mathbf{P}(x^c \cap y^c), & \boldsymbol{w} = \{x^c, y^c\}, \end{cases}$$

где $H(\boldsymbol{w})$ — статистическая энергия произвольного значения $\boldsymbol{w}$ случайной 2-конфигурации $\boldsymbol{g}$, а

$$\beta_{xy}, \quad \beta_x, \quad \beta_y$$

— обратные статистические температуры соответствующих бозон-событий

$$x \cap y, \; x \cap y^c, \; x^c \cap y.$$

Замечание. Распределение $K_{\boldsymbol{g}}$ под дуплетом $\{x, y\}$ — случайно – множественного базиса случайной 2-конфигурации $\boldsymbol{g}$ — определяется четырьмя вероятностями по формулам:

$$\mathbf{P}\left(K_{\boldsymbol{g}} = \emptyset\right) = \mathbf{P}(x^c \cap y^c),$$

$$\mathbf{P}\left(K_{\boldsymbol{g}} = \{x\}\right) = \sum_{\boldsymbol{w} \in S_x(x,y)} \mathcal{G}_{xy}(\boldsymbol{w}) = \mathbf{P}(x \cap y^c),$$

$$\mathbf{P}\left(K_{\boldsymbol{g}} = \{y\}\right) = \sum_{\boldsymbol{w} \in S_y(x,y)} \mathcal{G}_{xy}(\boldsymbol{w}) = \mathbf{P}(x^c \cap y),$$

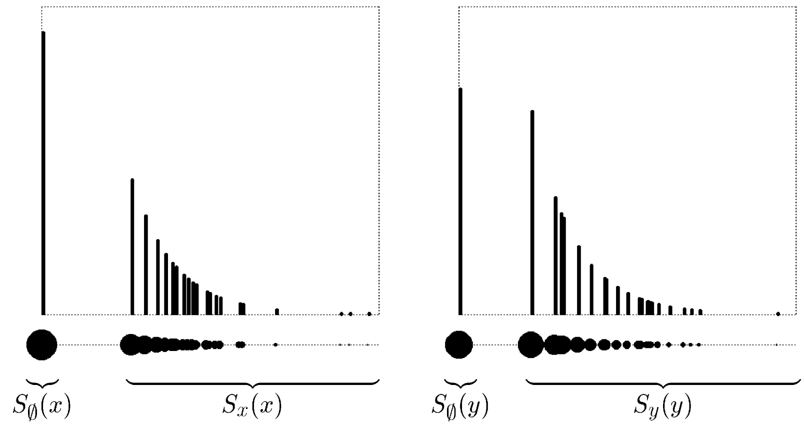

Рис. 2: Индивидуальные распределения гиббсовских случайных бозон-событий x и y. По горизонтальной оси отложена статистическая энергия, по вертикальной — вероятность. Показаны спектры возможных и невозможных состояний событий x и y.

$$\mathbf{P}\left(K_{\boldsymbol{g}} = \{x,y\}\right) = \sum_{\boldsymbol{w} \in S_{xy}(x,y)} \mathcal{G}_{xy}(\boldsymbol{w}) = \mathbf{P}(x \cap y).$$

Определение. *Гиббсовской случайной конфигурацией событий* называется случайная конфигурация событий $\boldsymbol{g}$ под конечным множеством событий $\mathfrak{X}$, распределение вероятностей которой имеет вид:

$$\mathcal{G}(\boldsymbol{w}) = \mathbf{P}(\boldsymbol{g} = \boldsymbol{w}) = \begin{cases} \exp\left\{-\beta_X H(\boldsymbol{w})\right\}, & \boldsymbol{w} \in S_X(\mathfrak{X}), \\ \mathbf{P}\left(\bigcap\limits_{x \in \mathfrak{X}} x^c\right), & \boldsymbol{w} \in S_{\emptyset}(\mathfrak{X}), \end{cases}$$

где $H(\boldsymbol{w})$ — статистическая энергия произвольного значения $\boldsymbol{w}$ случайной конфигурации $\boldsymbol{g}$, $S_X(\mathfrak{X})$ — спектры возможных состояний событий

$$\bigcap_{x \in X} x \bigcap_{x \in X^c} x^c \in \mathcal{F},$$

а β_X — обратные статистические температуры этих событий.

Замечание. Распределение $K_{\boldsymbol{g}}$ под $\mathfrak{X}$ — случайно – множественного базиса случайной конфигурации $\boldsymbol{g}$ — определяется 2^N вероятностями по формулам:

$$\mathbf{P}\left(K_{\boldsymbol{g}} = X\right) = \sum_{\boldsymbol{w} \in S_X(\mathfrak{X})} \mathcal{G}(\boldsymbol{w}), \quad X \in 2^{\mathfrak{X}}.$$

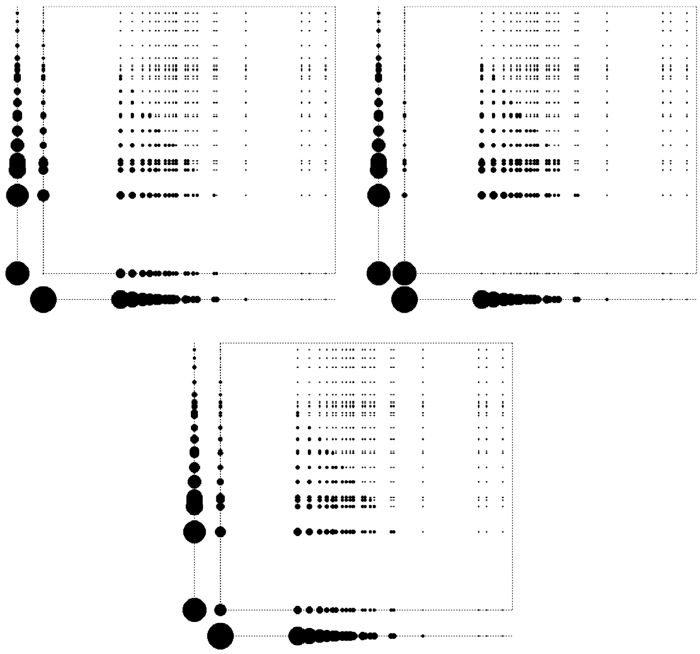

Рис. 3: Три распределения гиббсовских случайных конфигураций бозон-событий x и y. Площади черных кружков пропорциональны вероятностям. Внизу и слева от каждого из трех совместных распределений бозон-событий x и y показаны соответствующие им индивидуальные распределения. Верхний ряд: события с отрицательной ковариацией: $\mathsf{Kov}_{xy} < 0$ (слева), события с положительной ковариацией: $\mathsf{Kov}_{xy} > 0$ (справа) Нижний ряд: независимые события: $\mathsf{Kov}_{xy} = 0$.

Гиббсовская случайная конфигурация событий с независимой конфигурационной надстройкой

Гиббсовская случайная конфигурация событий с независимой конфигурационной надстройкой имеет распределение, определяемое для всех $\boldsymbol{w} \in S_X(\mathfrak{X})$ и $X \in 2^{\mathfrak{X}}$ формулой

$$\mathcal{G}(\boldsymbol{w}) = \frac{p_{\boldsymbol{g}}(X)}{\prod\limits_{x \in X} \mathbf{P}(x)} \cdot \exp\left\{- \sum_{x \in X} \beta_x H(w_x)\right\}, \tag{5}$$

которая следует из (3) и (4).

Замечание. Распределение $\mathcal{G}$ гиббсовской случайной конфигурации $\boldsymbol{g}$ с независимой конфигурационной надстройкой определяется:

1) распределением случайно – множественного базиса $K_{\boldsymbol{g}}$, т.е. 2^N вероятностями

$$p_{\boldsymbol{g}}(X), \quad X \in 2^{\mathfrak{X}},$$

которые "несут в себе" всю структуру статистических взаимозависимостей N бозон-событий из $\mathfrak{X}$, и

2) N индивидуальными распределениями вероятностей этих событий:

$$\mathcal{G}_x, \quad x \in \mathfrak{X},$$

каждое из которых определяется n вероятностями:

$$\mathcal{G}_x(w_x) = \mathbf{P}(g_x = w_x), \quad w_x \in S(x).$$

Таким образом, общее количество параметров распределения гиббсовской случайной конфигурации событий с независимой конфигурационной надстройкой[9] равно $2^N + n \cdot N$ вместо n^N в общем случае.

Заключение

Введенное в работе понятие случайной конфигурации событий $\boldsymbol{g}$ позволяет упростить анализ структуры взаимозависимостей случайных событий с помощью её разложения на два уровня — случайно – множественного базиса $K_{\boldsymbol{g}}$ и конфигурационной надстройки $\Delta_{\boldsymbol{g}}$.

В общем случае структура взаимозависимостей входящих в случайную конфигурацию событий определяется её распределением — n^N вероятностями. На случайно – множественном уровне анализируется та структура взаимозависимостей, которую можно описать распределением вероятностей случайного множества событий $K_{\boldsymbol{g}}$ и которая поэтому определяется всего 2^N вероятностями. Появляется уникальная возможность описывать структуры взаимозависимостей в случайных конфигурациях событий "вплоть до всех" взаимозависимостей в их случайно – множественном базисе. И несмотря на то, что при разумных N сделать такое не трудно, это дает принципиальные ранее невиданные дополнительные возможности в статистическом анализе структур взаимозависимостей систем случайных событий, позволяющие существенно продвинуться в описании и объяснении взаимозависимостей высоких порядков (вплоть до N).

[9] Это же в равной степени относится и к произвольной случайной конфигурации событий с независимой конфигурационной надстройкой.

Благодарности

Автор выражает благодарность Ксении Ермаковой и Елене Голденок, работы которых натолкнули его на аналогии, приведшие к понятию случайной конфигурации событий. Ермакова [1] решает практическую задачу случайно – множественной обработки статистики гиббсовских случайных событий в области пожарной безопасности, а Голденок [2] предлагает и анализирует двухуровневую структуру взаимозависимостей двудольного и гиббсовского случайного вектора. Автору осталось всего лишь объединить эти два подхода, чтобы прийти к новому понятию в теории случайных событий.

Литература

[1] Ермакова К.В. (2002) *Случайно – множественные методы обработки статистической информации в области пожарной безопасности.* Дипломная работа. Красноярск: КрасГУ, 34 с.

[2] Голденок Е.Е. (2002) О двухуровневой структуре статистических зависимостей и взаимодействий гиббсовских случайных векторов. *В этой книге.*

[3] Воробьёв О.Ю. (2002) *Теория случайных событий и её применение.* Красноярск: ИВМ СО РАН, 340 с.